

“教什么”和“怎么教”是课堂教学 落实核心素养的关键维度

——以“直线与圆的位置关系”为例^①

胡云飞

(江苏省溧阳市教师发展中心 213300)

高中数学课程标准(2017年版)的重点是落实数学学科核心素养,高中数学教学应以发展学生数学学科核心素养为导向。

近期,本市组织了高中青年教师优质课评比活动,上课课题是“直线与圆的位置关系”。活动过程中暴露出教师对课程标准理解不到位,教学目标不准确,教学设计不科学等问题。这些问题,也是当前课程改革中存在的突出问题。作为优质课评比的总结,在赛课结束以后,本市组织了一次青年教师研修活动,优质课评比的前两名教师仍然以本课题另选授课班级进行了课堂教学展示。为了更好地通过课堂教学实例来表达对课程标准和核心素养的理解,笔者也与这两位老师进行了同课异构教学展示活动,活动促进了青年教师对新课标和核心素养的认识。本文以“直线与圆的位置关系”为例,就课堂教学中落实核心素养的实践与思考与同仁交流。

1 内容分析

“直线与圆的位置关系”是初中和高中都有的教学内容。初中已经学习了直线和圆的三种位置关系的相关概念,会通过圆心到直线的距离 d 与圆的半径 r 的数量关系来判断直线与圆的位置关系(建立在给出 d 与 r 的数值或能用几何方法判断的情况下)。那么,高中的“直线与圆的位置关系”又学习什么?《普通高中数学课程标准(2017年版)》指出:能用直线和圆的方程解决一些简单的数学问题与实际问题。^[1]高中的学习突出了“方

程”,也就是突出“代数方法解决几何问题”的方法。“数形结合”是“平面解析几何初步”这一章重要的数学思想,在研究几何图形的性质时,既要体现“形”的直观性,还要体现“数”的严谨性。直线和圆是重要的基本图形,学生已经知道从“形”的角度分析它们的位置关系,如何从“数”的角度刻画它们之间的位置关系就显得十分必要和重要。教材采用通过方程组求交点的方法,也采用比较 d 与 r 大小关系来判断的方法。因此,直线与圆的位置关系的教学目标,不能仅仅是会判断直线与圆的位置关系,而是“代数方法解决几何问题”的解析法的体验、感悟与生成。

2 课堂实录

问题1. 最近学的什么内容啊?

学生抢答:圆,圆的方程。

问题2. 为什么要学习圆的方程?

学生回答不上来。

师:那我们把这个问题放一放?防止待会忘掉,把这个问题写在这儿(教师把这个问题写在黑板右侧上方)。

问题3. 在平面解析几何里面,我们只是研究了圆吗?

学生抢答:还有直线。

问题4. 我们研究了直线的哪些方面?

学生抢答(抢答的人数变少了):直线的方程,直线的位置关系。

问题5. 我们是怎么研究直线的位置关系的?

^① 本文系江苏省教育科学“十三五”规划立项课题“促进关键能力培养的中学数学‘问题解决’教学实践研究”(课题批准号:D/2018/02/211)的研究成果。

学生不再抢答,大部分学生面面相觑,少部分学生小声嘀咕,教师指定学生回答,第一个学生回答不出,第二个学生小心翼翼地回答出了问题.

生1:……

生2:建立直角坐标系,通过直线的方程来研究.

多数学生恍然大悟,教师进行肯定.

问题6.在平面解析几何里,我们在研究了直线以后,又出现了一种几何图形:圆.我们也把圆放到了直角坐标系里,得到了圆的方程.接下来,我们该研究什么呢?

学生不再抢答,思考后小声交流,等待一些时间后教师点有回答欲望的学生回答.

生3:直线与圆的位置关系,圆与圆的位置关系.

师追问:你为什么这么认为呢?

生3:我们前面学习直线的时候就是这样做的.

师:很好!我们前面研究直线的时候就是先建立坐标系产生直线的方程,然后研究了直线与圆的位置关系.数学是研究数量关系和空间形式的一门科学,你讲的都是我们接下来要研究的,我们就选直线与圆的位置关系吧.

问题7.判断图中直线与圆的位置关系.(几何画板显示图1,只有图形,没有坐标系,也没有方程,看上去是相切的,实际上是相离的.)

生4:相切.

师:你怎么知道相切的呢?

生4:看出来的.

师:你教教我怎么看.

生4:一个交点么!

师:哦,看交点个数.

学生开始小声交流讨论.

师:有问题吗?

生5:我感觉通过眼睛看的方式来确定它们的位置关系不大靠得住.

师:不大靠得住?

生5:因为眼睛不是显微镜,老师你能不能把图再放大一些.

教师慢慢把图放大.

学生一片哗然:相离,相离!

师:看来就这样看看还真靠不住,有没有靠得

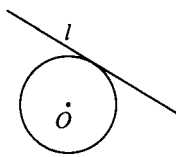


图1

住的办法啊?大家思考一下.

学生思考后开始小声交流,教师指定一个有表达欲望的学生回答.

生6:我们可以算出圆心到直线的距离,再跟圆的半径进行比较.

学生表示赞同.

师:这真是一个好办法,算出的数值是精确的!大家会算吗?

学生争说:要直线和圆的方程!

师:没方程啊!

学生争说:建立坐标系!

师:你打算怎么建坐标系呢?

生7:以这个圆的圆心为原点,向右为横轴,向上为纵轴.

师:好的,这样一来我们就可以确定直线和圆的方程了,我们通过几何画板显示出来.(教师点击显示直线与圆的方程)

师:接下来请大家给出严格的判断过程.

学生书写,交流,展示(包括点评,教师的点评就是小结三种位置关系,黑板板书,通过板书呈现出如下表格.)

相离	相切	相交
无公共点	有且只有一个公共点	有两个公共点
$d > r$	$d = r$	$d < r$

问题8.我们通过建立坐标系,确定直线和圆的方程,求出圆心到直线的距离并与圆半径比较大小的方法判断直线与圆是相离的位置关系.你还有其它方法来判断它俩是相离的吗?

学生思考并小声交流后,有一些学生有了想法,教师让学生回答.

生8:有了直线和圆的方程以后,我们还可以联立方程组,判断方程组的解的个数来确定直线与圆的交点个数,从而判断直线与圆的位置关系.

师:为什么方程组的解是交点的坐标呢?

生8:既然是交点,就是既在直线上又在圆上,应该同时满足两个方程.前面求直线的交点也是这样做的.

师:很好,我把这位同学的想法写了出来,大家看。(几何画板展示预设的解题过程)

学生看了一会就开始小声交流。

师:有问题吗?

生9:如果只是判断位置关系的话,我感觉不必把方程组解出来,只要判断消元以后的那个一元二次方程的根的情况就可以了,用判别式来判断。

师:可以吗?

学生:可以!

(注:这个地方备课的时候预设了两种情况,一种是学生能回答出来,还有一种是学生回答不出来,如果回答不出来就把这个问题放一放,通过下一个问题的解答再回头来看。)

问题9-1. 已知圆O的方程为 $x^2 + y^2 = 4$, 直线l的方程为 $x - \sqrt{3}y + 2\sqrt{3} = 0$, 请判断直线l与圆O的位置关系。

活动过程:学生试解,教师巡视,要求速度快的同学一题多解;学生陈述解决问题的思路;教师板演解题过程;教师题后小结。(学生大多数使用的是d与r的大小关系,有少数学生使用了方程组的方法,两种方法都板演,解题结束以后进行题后反思,提炼方法原理,并对两种不同方法进行对比。)

问题9-2. 求弦长AB。(注:课堂预设了“求交点坐标”,目的是引导学生感悟通过方程组来求交点从而判断直线与圆的位置关系。因为学生在前面已经想到了用方程组来解决位置关系,此处几何画板上呈现题目的时候隐藏了“求交点坐标”,直接求弦长了。)

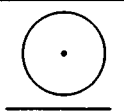

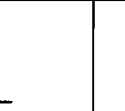
活动过程:学生试解,教师巡视,要求速度快的同学一题多解;展示学生的解题并组织学生点评。部分学生使用了“垂径定理”和“勾股定理”,有少数学生使用了方程组的方法。两种方法并举。

(课堂预设了第3个小问题:问题9-3. 自点P(2,1)作圆O的切线PA,求切线PA的方程。用意是强化解析法解决直线与圆的位置关系的问题,特别是待定系数法求直线方程时点斜式方程的缺陷,培养学生思维的严密性。因为借班上课,师生之间教与学的习惯比较生疏,课堂留下的时间不多,所以几何画板上没有显示这个问题,留下的时间进行下一个问题,也就是课堂小结环节,课

堂小结是课堂教学不可缺少的环节。)

问题10. 说一下这一节课的主要收获和感悟吧。

待学生思考片刻后指定学生回答,学生比较顺利地概括了课堂的主要知识,随着学生的陈述教师点击显示几何画板上的预设内容,有先后次序地呈现:

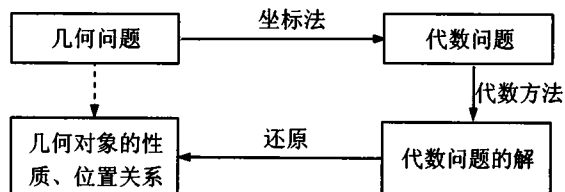
相离	相切	相交
		
无公共点	有且只有一个公共点	有两个公共点
$d > r$	$d = r$	$d < r$
方程组无解	方程组仅有一组解	方程组有两组不同的解

师:也就是说我们有两种方法来判断直线与圆的位置关系,一种是通过比较d与r的大小关系,另一种是通过判断方程组的解的个数,前一种利用了几何关系,后一种则是“代数方法解决几何问题”,当然前一种方法里面求d与r仍然是代数方法,因此,“代数方法解决几何问题”是解析几何的本质,我们整个这一章都贯穿着这种思想。

师:我们现在来回答前面遗留的问题吧,来,还在黑板这儿。(黑板右上角问题2. 为什么要学习圆的方程?)

生:通过圆的方程来解决直线与圆的位置关系的问题。

师:用代数方法解决几何问题,这正是我们解析几何的本质。再联想前面我们研究的直线,我们可以发现解析几何研究问题的一般方法:建立坐标系,将几何问题代数化,用代数方法解决几何问题。(几何画板上展示下图)



师:“通过比较d与r的大小关系”与“通过判断方程组的解的个数”这两种方法里面你喜欢哪

一种?

学生抢答:第一种!第二种太繁了!

师(微笑说):那我如果改动一下这个圆的方程,你再看看呢?(把圆的方程改成了 $x^2+2y^2=4$)

大部分学生在思考的时候,已经有学生在插嘴了:这已经不是圆的方程了!

师:既然不是圆了,那么“通过比较 d 与 r 的大小关系”的方法还行吗?

学生摇头.

师:下课时间要到了,这个问题我们在解析几何的后续学习中会碰到,就留给我们以后去研究了.

(花絮:笔者下课后准备离开的时候,有3位学生追上来跟老师讨论这个遗留问题,认为不管是不是圆都可以“通过判断方程组的解的个数”来解决.这种解析几何观念的形成是本课的重要目标,本课显然是达成了.)

3 “教什么”和“怎么教”是课堂教学落实核心素养的关键维度

课堂教学的设计与实施,不外乎教学目标的设定和教学过程的实施,也就是“教什么”和“怎么教”的问题.这是课堂教学落实核心素养的关键维度,促进核心素养发展的课堂教学应该从这两个方面去思考.

3.1 教什么:追求高位的教学目标

课堂教学的目标,既有显性的知识目标,也有隐性的能力和素养目标,教师常常忽视隐性的目标.数学学科核心素养是数学课程目标的集中体现,教师在制定教学目标时要充分关注数学学科核心素养的达成.^[1]教学目标,不能仅仅停留在知识技能层面,更要关注数学素养的发展.“直线与圆的位置关系”对高中学生来说,就知识而言不是新的东西,它的教学价值在于解析几何“解析法”的体验.本节课,就知识而言是位置关系,就方法而言是“解析法”,就素养而言是解析几何思想意识的形成.解析几何的意识,不能等到未来“圆锥曲线”这一章再来形成,而是在直线与圆的研究中形成并升华,为后续的直线和圆锥曲线的位置关系的学习奠定基础.因此,这一堂课的教学目标不应该定位在位置关系的知识再现,而应该定位在解决问题的方法提升,解析几何思想意识的形成.

需要注意的是,显性目标是知识层面的,隐性

目标是素养层面的,知识是冰山一角,素养才是冰山淹没在水下的部分,知识的暂缺可以弥补,素养的缺少会阻止能力的提升.要处理好“知识”、“能力”和“素养”之间的关系,让知识的获取在能力提升和素养发展的过程中自然生成.高立意的课堂不是仅仅瞄准知识的,一定是透过知识瞄准了能力和素养.

就学科教学而言,发展学生核心素养的基础目标是改善学生的思维品质,提高学生的学习能力,让学生学会学习.发展学生核心素养的根据地是课堂,课堂教学应从“知识”核心向“素养”核心转移.^[2]

核心素养要求下的课堂教学,要追求高位的教学目标,既要有知识目标也要有素养目标,要站在课程目标和章节目标的高度来确定课堂教学目标.

3.2 怎么教:追求高效的教学过程

教学目标确定以后就是教学过程的实施了.在教学活动中,教师应准确把握课程目标、课程内容、学业质量的要求,合理设计教学目标,并通过相应的教学实施,在学生掌握知识技能的同时,促进数学学科核心素养的提升及水平的达成.^[1]核心素养目标的达成,是基于学生学习能力的提升,这种能力,不是通过知识记忆和技能训练能达成的.素养的达成,在于学生在学习过程中,是否真实地进入学习状态,是否深入地进行思维活动.因此,教学过程对学生核心素养的发展起到极其重要的作用.在课堂教学过程中,教师不能成为“讲师”,不能采取简单易操作的“我讲你听”的教学方式,这一种教学方式会因为学生缺乏自主构建与深入的过程,缺少必需的思维参与,不利于数学素养的发展.

“直线与圆的位置关系”的教学过程中,教师要通过引导,使学生经历下列过程:首先建立坐标系,将几何问题代数化,用代数语言描述几何要素及其相互关系;进而,将几何问题转化为代数问题;处理代数问题;分析代数结论的几何含义,最终解决几何问题.通过上述活动,使学生感受到解析法研究问题的一般程序.^[3]本课的导入并没有用复杂的情境,在前课学习的基础上进行回顾,这种回顾是整章知识的建构;通过直线学习的一般方法,类比产生圆的学习的一般过程,让学生自己

发现研究“直线与圆的位置关系”的新问题,进而在位置关系的判断中,从直观到严谨,产生建立坐标系的坐标法思想,并逐步从部分代数化到全部代数化.这样,解析几何的“创造”过程就自然呈现,学生在这个过程中发现、探究,知识的得来会更深刻,能力的提升会更真实,素养的发展会更自然.课堂教学选取了基于学生主动探究的“问题解决教学”,注重引导学生“发现问题,提出问题”“分析问题,解决问题”,“会用数学的眼光观察现实世界,会用数学的思维思考现实世界,会用数学的语言表达现实世界”的课程目标得到了充分的体现.

高品质的课堂教学,要追求高效的教学过程,课堂教学中教师要精于设计问题,通过“问题解决教学”组织学生探究,通过对问题的探究在解决问题的过程中获得新知,获得感受,获得解决问题的方法和思想,从而获得核心素养的发展,获得能力的提升.^[2]

(上接第8页)

公元412年,西里尔当上了亚历山大的大主教后推行所谓反对“异教”和“邪说”的计划,新柏拉图主义也在“邪说”之列,希帕蒂亚自然地被列为最危险的人.但是希帕蒂亚为捍卫真理拒绝放弃她的哲学主张,坚持宣传科学,提倡思想自由.公元415年3月的一天,希帕蒂亚象往常一样,乘着其漂亮的马车到博物院讲学.行至凯撒瑞姆教堂旁边,一伙埃及基督徒受西里尔的指使,把希帕蒂亚迅速拖进教堂,绑架了她,如图12^①.灭绝人寰的暴徒们把她剥得一丝不挂,如图13^{②③},然后用锐器割她的皮肉,直割得她全身血肉模糊,奄奄一息;暴徒们仍不罢手,最终又砍去她的手脚,将



图12 希帕蒂亚被绑架

4 结束语

《普通高中数学课程标准(2017年版)》提出:在问题解决的过程中,理解数学内容的本质,促进学生数学学科核心素养的形成和发展.^[1]核心素养目标下,教师不仅仅要关注学生知识的掌握,更要关注学生素养的发展.数学教育应该是指向“人的发展”的教育,站在“立德树人”的高度,以课堂为主阵地,通过发展学生核心素养来达到数学育人的目的,这是当前数学教学改革的需要.

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部. 普通高中课程标准(2017年版)[M]. 北京:人民教育出版社,2018
- [2] 胡云飞. 核心素养视角下基于探究的概念教学设计与反思[J]. 数学通报,2017,56(11):33-36
- [3] 《普通高中课程标准实验教科书·数学》编写组. 高中数学教学参考书必修2[M]. 南京:江苏凤凰教育出版社,2012



图13 希帕蒂亚被剥光衣服

她投入到熊熊烈火之中,残忍地杀害了她.希帕蒂亚作为科学和真理献身的历史上第一位伟大的女数学家载入史册.(未完待续)

① CHARLES KINGSLEY. HYPATIA [M]. LONDON: MACMILLAN AND CO, 1888:320.

② [美]克利福德·皮寇弗. 数学之书[M]. 陈以礼,译. 重庆:重庆大学出版社,2015:31.

③ CHARLES KINGSLEY. HYPATIA [M]. LONDON: MACMILLAN AND CO, 1888:334.