江苏省仪征中学 2019 届高三下学期数学周末限时训练 5

数学 I

一、填空题：本大题共 14 小题，每小题 5 分，共 70 分．请把答案填写在答题卡相应位置．

1．已知全集$U=\mathbf{R}$，集合$A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{x|x(4-x)<0\}$，则$A\cap(\complement_U B)=$_______.

2．复数$z=\dfrac{2+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$（i 为虚数单位）的共轭复数是______________.

```
n ← 6
s ← 0
While  s < 15
    s ← s + n
    n ← n − 1
End  While
Print  n
```

3．袋中共有大小相同的 4 只小球，编号分别为 1，2，3，4.现从中任取 2 只小球，则取出的 2 只小球的编号之和是奇数的概率为________.

4．如图所示是一算法的伪代码，执行此算法时，输出的结果是______.

5．已知$|\boldsymbol{a}|=1,|\boldsymbol{b}|=2,\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(1,\sqrt{2})$，则向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为_______.

6．将函数$y=5\sin(2x+\dfrac{\pi}{4})$的图象向左平移$\varphi(0<\varphi<\dfrac{\pi}{2})$个单位后，所得函数图象关于$y$轴对称，则$\varphi=$______________.

7. 定义在$\mathbf{R}$上的奇函数$f(x)$满足：当$x\geqslant 0$时，$f(x)=\log_2(2+x)+(a-1)x+b$（$a,b$为常数）.若$f(2)=-1$，则$f(-6)$的值为______________.

8．在△ABC 中,若$\cos C+\sin C-\dfrac{2}{\cos B+\sin B}=0$,则$\dfrac{a+b}{c}$的值是______________.

9．已知 $PABC$ 是正三棱锥，其外接球 O 的表面积为 16π，且∠APO＝∠BPO＝∠CPO＝30°，则三棱锥的体积为________.

10．设双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右顶点分别为$A_1,A_2$，左、右焦点分别为$F_1,F_2$，以$F_1F_2$为直径的圆与双曲线左支的一个交点为$P$．若以$A_1A_2$为直径的圆与$PF_2$相切，则双曲线$C$的离心率为______________.

11．已知$A(1,0),B(4,0)$，直线l过定点$(1,-2)$，若在直线l上存在点M满足$2MA=MB$，则直线l的斜率k取值范围是______________.

12．已知函数$f(x)=\begin{cases}2x+\cos x, x\geqslant 0\\ x(a-x), \quad x<0\end{cases}$，若关于$x$的不等式$f(x)<\pi$的解集为$(-\infty,\dfrac{\pi}{2})$，则实数$a$的取值范围为______________.

13．设钝角△ABC 的三个内角为 A，B，C，且 B < A <C，若$\dfrac{\sin(A-B)}{\sin C}=\dfrac{1}{3\cos 2A}$，则 *tan*C 的最小值是____________.

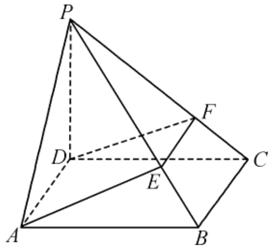
14．已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=-1$，$a_2>a_1$，$|a_{n+1}-a_n|=2^n(n\in\mathbf{N}^*)$．若数列$\{a_{2n-1}\}$单调递减，数列$\{a_{2n}\}$单调递增，则数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=$____________.

二、解答题：本大题共 6 小题，共计 90 分．请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或计算步骤．

15. 如图，在四棱锥 $PABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是矩形，$PD\perp$平面 $ABCD$，过 AD 的平面分别与 PB，PC 交于点 E，F.

求证：(1) 平面 $PBC\perp$平面 PCD；

(2) $AD\parallel EF$.



16. 已知向量 $\boldsymbol{a}=\left(\sin\frac{x}{3},\ \cos\frac{x}{3}\right)$，$\boldsymbol{b}=\left(\cos\frac{x}{3},\ \sqrt{3}\cos\frac{x}{3}\right)$，函数 $f(x)=\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}$.

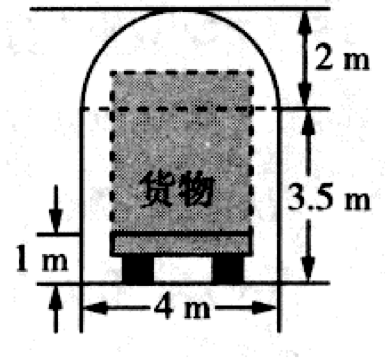
(1)求函数 $f(x)$的单调递增区间；

(2)如果$\triangle ABC$ 的三边 a，b，c 满足 $b^2=ac$，且边 b 所对的角的大小为 x，试求 x 的范围及此时函数 $f(x)$的值域.

17.如图，某隧道的横截面由一个半圆及一个长方形的三边组成，已知半圆的半径为 2*m*，长方形的宽为 3.5*m*，一平板车车身高 1*m*，车上装载截面为长方形的货物从隧道正中间通过，为了保证行车安全，要求货物顶部距隧道的竖直距离不得小于 0.5*m*.

（1）如果货物截面长方形的宽为 3*m*，那么货物的最大高度是多少？

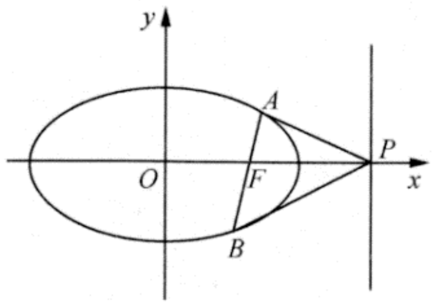
（2）适当调整货物的宽与高（不受车宽影响），可以使货物截面的面积最大，从而使运载的货物最多，试问应如何调整，才能使运载的货物最多？



18. 已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，右准线方程为 $x=2\sqrt{2}$.

（1）求椭圆 C 的标准方程;

（2）过椭圆的右焦点 F 作斜率为 k 的直线 l 与椭圆 C 交于 A，B 两点，P 为右准线与 x 轴的交点，记直线 PA 的斜率为 k_1，直线 PB 的斜率为 k_2，若 $\dfrac{1}{k_1^2}+\dfrac{1}{k_2^2}=8$，求直线 l 的方程.



19. 已知数列$\{a_n\}$的各项均为正数，记数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，数列$\{a_n^2\}$的前 n 项和为 T_n，且 $3T_n=S_n^2+2S_n$，$n\in\mathbf{N}^*$.

（1）求 a_1 的值；

（2）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（3）若 k，$t\in\mathbf{N}^*$，且 S_1，S_k-S_1，S_t-S_k 成等比数列，求 k 和 t 的值.

20．已知函数 $f(x)=x^2+a|\ln x-1|$，$g(x)=x|x-a|+2-2\ln 2, a>0$.

（1）当 $a=1$ 时, 求函数 $f(x)$ 在区间 $[1,e]$ 上的最大值；

（2）若 $f(x)\geq\dfrac{3}{2}a, x\in[1,+\infty)$ 恒成立, 求 a 的取值范围；

（3）对任意 $x_1\in[1,+\infty)$, 总存在惟一的 $x_2\in[2,+\infty)$, 使得 $f(x_1)=g(x_2)$ 成立，求 a 的取值范围。

江苏省仪征中学 2019 届高三下学期数学周末限时训练 5

数学Ⅱ(附加题)

21． [选修 4-2：矩阵与变换]（本小题满分 10 分）

设二阶矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}$，$(\boldsymbol{BA})^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{B}^{-1}$.

22．[选修 4-4：坐标系与参数方程]（本小题满分 10 分）

在极坐标系中，已知圆 A 的圆心为(4，0)，半径为 4，点 M 为圆 A 上异于极点 O 的动点，求弦 OM 中点的轨迹的极坐标方程.

23．（本小题满分 10 分）

已知点 A(1，2)在抛物线 Γ：$y^2=2px$ 上．

(1) 若△ABC 的三个顶点都在抛物线 E 上，记三边 AB、BC、CA 所在直线的斜率分别为 k_1、k_2、k_3，求$\frac{1}{k_1}-\frac{1}{k_2}+\frac{1}{k_3}$的值；

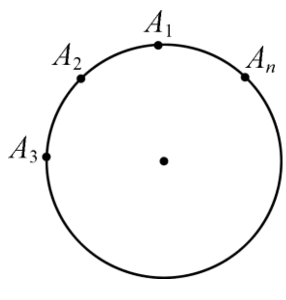
(2) 若四边形 ABCD 的四个顶点都在抛物线 E 上，记四边 AB、BC、CD、DA 所在直线的斜率分别为 k_1、k_2、k_3、k_4，求$\frac{1}{k_1}-\frac{1}{k_2}+\frac{1}{k_3}-\frac{1}{k_4}$的值．

24．（本小题满分 10 分）

如图，圆周上有 n 个固定点，分别为 A_1，A_2，…，A_n($n\in\mathbf{N}^*$，$n\geqslant 2$)，在每一个点上分别标上 1，2，3 中的某一个数字，但相邻的两个数字不相同，记所有的标法总数为 a_n.

(1) 写出 a_2，a_3，a_4 的值；

(2) 写出 a_n 的表达式，并用数学归纳法证明．



江苏省仪征中学2019届高三下学期数学周末限时训练5参考答案

一、填空题：

1. $\{1,2,3,4\}$；2. $\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\mathrm{i}$；3. $\frac{2}{3}$；4. 3；5. $\frac{2\pi}{3}$；6. $\frac{\pi}{8}$；7. 4；　8. $\sqrt{2}+1$；9. $\frac{9\sqrt{3}}{4}$；10. $\sqrt{5}$

11. $(-\infty,0]\cup[\frac{4}{3},+\infty)$；12. $(-2\sqrt{\pi},+\infty)$；13. $-\frac{3}{4}$；　14. $\frac{(-2)^n-1}{3}$.

二、解答题：

15. **证明**：(1) 因为PD⊥平面ABCD，BC⊂平面ABCD，所以PD⊥BC.
因为底面ABCD是矩形，所以CD⊥BC.
因为CD∩PD＝D，CD，PD⊂平面PCD，所以BC⊥平面PCD.
因为BC⊂平面PBC，所以平面PBC⊥平面PCD.(…………7分)
(2) 因为底面ABCD是矩形，所以AD∥BC.
因为BC⊂平面PBC，AD⊄平面PBC，
所以AD∥平面PBC.
因为AD⊂平面ADFE，平面ADFE∩平面PBC＝EF，所以AD∥EF.(………………14分)

16. 解 (1)向量 $\boldsymbol{a}=\left(\sin\frac{x}{3},\ \cos\frac{x}{3}\right)$，$\boldsymbol{b}=\left(\cos\frac{x}{3},\ \sqrt{3}\cos\frac{x}{3}\right)$，

则函数 $f(x)=\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}=\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}+\sqrt{3}\cos^2\frac{x}{3}=\frac{1}{2}\sin\frac{2x}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{2x}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\left(\frac{2x}{3}+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}$，

令 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\le\frac{2x}{3}+\frac{\pi}{3}\le2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$(k\in\mathbf{Z})$.解得 $3k\pi-\frac{5}{4}\pi\le x\le3k\pi+\frac{\pi}{4}$，$(k\in\mathbf{Z})$，

故函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[3k\pi-\frac{5}{4}\pi,\ 3k\pi+\frac{\pi}{4}\right]$，$(k\in\mathbf{Z})$.

(2) $\because b^2=ac.\therefore\cos x=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a^2+c^2-ac}{2ac}\ge\frac{2ac-ac}{2ac}=\frac{1}{2}$，

又 $-1<\cos x<1$，$\therefore\frac{1}{2}\le\cos x<1$，$\therefore0<x\le\frac{\pi}{3}$，$\therefore\frac{\pi}{3}<\frac{2x}{3}+\frac{\pi}{3}\le\frac{5\pi}{9}$，$\therefore\frac{\sqrt{3}}{2}<\sin\left(\frac{2x}{3}+\frac{\pi}{3}\right)\le1$，

$\therefore\sqrt{3}<\sin\left(\frac{2x}{3}+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\le1+\frac{\sqrt{3}}{2}$，即函数 $f(x)$ 的值域为 $\left(\sqrt{3},\ 1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.(………………14分)

17.解：（1）如图，设半圆圆心为O，直径为AB，货物右边界所在直线与半圆、直径AB的交点分别为P，M，连接OP，∠POB=θ　（$0^{\circ}<\theta<90^{\circ}$）.

如果货物截面长方形的宽度为3m，则OM=1.5m，$\therefore\cos\theta=\frac{OM}{OP}=\frac{3}{4},\therefore\sin\theta=\frac{\sqrt{7}}{4}$，

则 $PM=2\sin\theta=\frac{\sqrt{7}}{2}m$，∴货物的最大高度为 $\frac{\sqrt{7}}{2}+3.5-1-0.5=(\frac{\sqrt{7}}{2}+2)m$.……5分

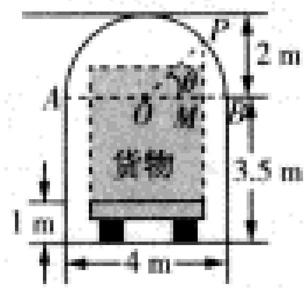
(2)由（1）知货物宽度为2OM=4cosθ,PM=2sinθ,则货物的最大高度h=PM+3.5−1−0.5=2（sinθ+1），

所以货物截面面积为=4cosθ・2（sinθ+1）=8（cosθ+ cosθsinθ）（……9分）

$S'=8(-\sin\theta+1-2\sin^2)=0$，得 $\theta=30^o$.

列表得 $\theta=30^o$ 时 S 取最大值，此时 $OM=\sqrt{3}$ m，

所以：当货物宽度为 $2\sqrt{3}$ m，高度为 3m 时，才能使运载货物最多。…………14 分



18. （1）设椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，$a>0$，$b>0$，焦距为 $2c$，

由椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，右准线方程为 $x=2\sqrt{2}$ 可得，$\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2},\\ \frac{a^2}{c}=2\sqrt{2},\end{cases}$ ……3 分

解得 $a=2$，$c=\sqrt{2}$，所以 $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{4-2}=\sqrt{2}$.

故椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$. ……6 分

（2）设直线 AB 的方程为 $x=my+\sqrt{2}$，与椭圆 $x^2+2y^2=4$ 联立消去 x 得，

$(2+m^2)y^2+2\sqrt{2}my-2=0$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，解得 $y_{1,2}=\frac{-\sqrt{2}m\pm2\sqrt{m^2+1}}{2+m^2}$，

所以 $y_1+y_2=\frac{-2\sqrt{2}m}{m^2+2}$，$y_1y_2=\frac{-2}{m^2+2}$，① ……8 分

因为 P 为右准线与轴的交点，所以 $P(2\sqrt{2},0)$.

由 $\frac{1}{k_1^2}+\frac{1}{k_2{}^2}=8$ 得，$\frac{1}{\left(\frac{y_1}{x_1-2\sqrt{2}}\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{y_2}{x_2-2\sqrt{2}}\right)^2}=8$， ……10 分

即 $\frac{(x_1-2\sqrt{2})^2}{y_1^2}+\frac{(x_2-2\sqrt{2})^2}{y_2{}^2}=8$，

于是 $\frac{(my_1-\sqrt{2})^2}{y_1^2}+\frac{(my_2-\sqrt{2})^2}{y_2{}^2}=8$， ……12 分

整理得 $2m^2-2\sqrt{2}m\frac{y_1+y_2}{y_1y_2}+2\left(\frac{y_1+y_2}{y_1y_2}\right)^2-\frac{4}{y_1y_2}=8$，(*)

将①代入(*)式得，$m^2=1$，所以 $m=\pm1$. ……14 分

于是直线 AB 的方程为 $x=\pm y+\sqrt{2}$，即 $y=\pm(x-\sqrt{2})$.

又当直线与轴重合时，不符合题意.

综上，所求直线 AB 的方程为 $y=\pm(x-\sqrt{2})$. ……16 分

19. 解：（1）当 $a=1$，$x\in[1,e]$ 时 $f(x)=x^2-\ln x+1$，$f'(x)=2x-\frac{1}{x}\ge f'(1)=1$，

所以 $f(x)$ 在 $[1,e]$ 递增，所以 $f(x)_{\max}=f(e)=e^2$…………………………………4 分

（2）①当 $x\ge e$ 时，$f(x)=x^2+a\ln x-a$，$f'(x)=2x+\frac{a}{x}$，

$\because a>0$，$\therefore f(x)>0$ 恒成立，

$\therefore f(x)$ 在 $[e,+\infty)$ 上增函数，故当 $x=e$ 时，$y_{\min}=f(e)=e^2$………………………5 分

②当 $1\le x<e$ 时，$f(x)=x^2-a\ln x+a$，$f'(x)=2x-\frac{a}{x}=\frac{2}{x}(x+\sqrt{\frac{a}{2}})(x-\sqrt{\frac{a}{2}})$，

（i） 当$\sqrt{\frac{a}{2}}\le 1$, 即 $0<a\le 2$ 时， $f'(x)$ 在 $x\in(1,e)$ 时为正数，

所以 $f(x)$ 在区间 $[1,e)$ 上为增函数,

故当 $x=1$时， $y_{\min}=1+a$，且此时 $f(1)<f(e)=e^2$…… ……………………7 分

(ii)当$1<\sqrt{\frac{a}{2}}<e$, 即 $2<a<2e^2$ 时，

$f'(x)$ 在 $x\in(1,\sqrt{\frac{a}{2}})$ 时为负数，在间 $x\in(\sqrt{\frac{a}{2}},e)$ 时为正数,

所以 $f(x)$ 在区间$[1,\sqrt{\frac{a}{2}})$ 上为减函数，在$(\sqrt{\frac{a}{2}},e]$ 上为增函数,

故当$x=\sqrt{\frac{a}{2}}$ 时， $y_{\min}=\frac{3a}{2}-\frac{a}{2}\ln\frac{a}{2}$，

且此时 $f(\sqrt{\frac{a}{2}})<f(e)=e^2$…………………………………… ……………………8 分

(iii)当$\sqrt{\frac{a}{2}}\ge e$, 即 $a\ge 2e^2$ 时， $f'(x)$ 在 $x\in(1,e)$ 时为负数，

所以 $f(x)$ 在区间[1, e]上为减函数，

故当 $x=e$ 时， $y_{\min}=f(e)=e^2$…………… ……………………………………9 分

综上所述，函数 $y=f(x)$ 的最小值为 $y_{\min}=\begin{cases}1+a,0<a\le 2\\ \frac{3a}{2}-\frac{a}{2}\ln\frac{a}{2},2<a\le 2e^2\\ e^2,a>2e^2\end{cases}$ ………10 分

所以当$1+a\ge\frac{3}{2}a$时, 得$0<a\le 2$；

当$\frac{3}{2}a-\frac{a}{2}\ln\frac{a}{2}\ge\frac{3}{2}a$（$2<a<2e^2$）时, 无解；

当$e^2\ge\frac{3}{2}a$ （$a\ge 2e^2$）时, 得$a\le\sqrt{\frac{2}{3}}e$不成立.

综上, 所求a的取值范围是$0<a\le 2$ ……………………………………11 分

（3）①当$0<a\le 2$时, $g(x)$ 在$[2,+\infty)$ 单调递增,

由$g(2)=6-2a-2\ln 2\le 1+a$, 得$\frac{5}{3}-\frac{2}{3}\ln 2\le a\le 2$ … ………………12 分

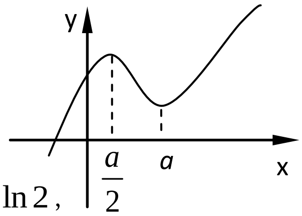
②当$1<\frac{a}{2}\le 2$时， $g(x)$ 在$[2,+\infty)$ 先减后增, 由$g(2)=2a-2-2\ln 2<\frac{3a}{2}-\frac{a}{2}\ln\frac{a}{2}$,

得$\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\ln\frac{a}{2}-2-2\ln 2<0$,

设$h(t)=t+t\ln t-2-2\ln 2(t=\frac{a}{2})$, $h'(t)=2+\ln t>0(1<t<2)$,

所以$h(t)$单调递增且$h(2)=0$，所以$h(t)<0$恒成立得$2<a<4$… … …………14 分

③当$2<\frac{a}{2}<e^2$时，$f(x)$在$[2,\frac{a}{2}]$递增，在$[\frac{a}{2},a]$递减，



在$[a,+\infty)$递增, 所以由$g(\frac{a}{2})<\frac{3a}{2}-\frac{a}{2}\ln\frac{a}{2}$,

得$\frac{a^2}{4}-\frac{3a}{2}+\frac{a}{2}\ln\frac{a}{2}+2-2\ln 2<0$, 设$m(t)=t^2-3t+t\ln t+2-2\ln 2$,

则$m'(t)=2t-2+\ln t>0(t\in(2,e^2)$, 所以$m(t)$递增，且$m(2)=0$,

所以$m(t)>0$恒成立，无解.

④当$a>2e^2$时，$f(x)$在$[2,\frac{a}{2}]$递增，在$[\frac{a}{2},a]$递减，在$[a,+\infty)$递增,

所以由$g(\frac{a}{2})<e$ 得$\frac{a^2}{4}-e^2+2-2\ln 2<0$无解.

综上, 所求a的取值范围是$a\in[\frac{5}{3}-\frac{2}{3}\ln 2,4)$ ………………16 分

20. 解：（1）由 $3T_1=S_1^2+2S_1$，得 $3a_1^2=a_1^2+2a_1$，即 $a_1^2-a_1=0$.

因为 $a_1>0$，所以 $a_1=1$. ………………………2 分

（2）因为 $3T_n=S_n^2+2S_n$， ①

所以 $3T_{n+1}=S_{n+1}^2+2S_{n+1}$，②

②－①，得 $3a_{n+1}^2=S_{n+1}^2-S_n^2+2a_{n+1}$.

因为 $a_{n+1}>0$，

所以 $3a_{n+1}=S_{n+1}+S_n+2$， ③ ………………………5 分

所以 $3a_{n+2}=S_{n+2}+S_{n+1}+2$，④

④－③，得 $3a_{n+2}-3a_{n+1}=a_{n+2}+a_{n+1}$，即 $a_{n+2}=2a_{n+1}$，

所以当 $n\geq 2$ 时，$\frac{a_{n+1}}{a_n}=2$. ………………………8 分

又由 $3T_2=S_2^2+2S_2$，得 $3(1+a_2^2)=(1+a_2)^2+2(1+a_2)$，

即 $a_2^2-2a_2=0$.

因为 $a_2>0$，所以 $a_2=2$，所以$\frac{a_2}{a_1}=2$，所以对 $n\in\mathbf{N}^*$，都有$\frac{a_{n+1}}{a_n}=2$ 成立，

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2^{n-1}$，$n\in\mathbf{N}^*$. ………………………10 分

(3)由(2)可知 $S_n=2^n-1$.

因为 S_1，S_k-S_1，S_t-S_k 成等比数列，

所以$(S_k-S_1)^2=S_1(S_t-S_k)$，即$(2^k-2)^2=2^t-2^k$， ………………………12 分

所以 $2^t=(2^k)^2-3\cdot 2^k+4$，即 $2^{t-2}=(2^{k-1})^2-3\cdot 2^{k-2}+1(*)$.

由于 $S_k-S_1\neq 0$，所以 $k\neq 1$，即 $k\geq 2$.

当 $k=2$ 时，$2^t=8$，得 $t=3$. ………………………14 分

当 $k\geq 3$ 时，由(*)，得$(2^{k-1})^2-3\cdot 2^{k-2}+1$ 为奇数，

所以 $t-2=0$，即 $t=2$，代入(*)得 $2^{2k-2}-3\cdot 2^{k-2}=0$，即 $2^k=3$，此时 k 无正整数解.

综上，$k=2$，$t=3$. ………………………16 分

2019 届高三下学期数学周末限时训练 5 参考答案（附加题）

21. **解**：设 $\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，因为$(\boldsymbol{BA})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}$，(…………2 分)

所以$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=$（）$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，即$\begin{cases} a+2c=1, \\ b+2d=0, \\ 3a+4c=0, \\ 3b+4d=1, \end{cases}$ (…………6 分)

解得$\begin{cases} a=-2, \\ b=1, \\ c=\dfrac{3}{2}, \\ d=-\dfrac{1}{2}, \end{cases}$ 所以 $\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \dfrac{3}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{bmatrix}$.(…………10 分)

22. **解**：由题意知，圆 A 的极坐标方程为 $\rho=8\cos\theta$，(…………4 分)

设弦 OM 中点为 $N(\rho，\theta)$，则 $M(2\rho，\theta)$，

因为点 M 在圆 A 上，所以 $2\rho=8\cos\theta$，即 $\rho=4\cos\theta$.(…………9 分)

又点 M 异于极点 O，所以 $\rho\neq0$，

所以弦 OM 中点的轨迹的极坐标方程为 $\rho=4\cos\theta(\rho\neq0)$．(…………10 分)

23. **解**：(1) 由点 A(1，2)在抛物线上，得 p＝2，所以抛物线方程为 $y^2=4x$.(…………3 分)

设 $B\left(\dfrac{y_1^2}{4}，y_1\right)$、$C\left(\dfrac{y_2^2}{4}，y_2\right)$，$\therefore\dfrac{1}{k_1}-\dfrac{1}{k_2}+\dfrac{1}{k_3}=\dfrac{\frac{y_1^2}{4}-1}{y_1-2}-\dfrac{\frac{y_2^2}{4}-\frac{y_1^2}{4}}{y_2-y_1}+\dfrac{1-\frac{y_2^2}{4}}{2-y_2}=\dfrac{y_1+2}{4}-\dfrac{y_2+y_1}{4}+\dfrac{2+y_2}{4}=1$.(…7 分)

(2) 另设 $D\left(\dfrac{y_3^2}{4}，y_3\right)$，则$\dfrac{1}{k_1}-\dfrac{1}{k_2}+\dfrac{1}{k_3}-\dfrac{1}{k_4}=\dfrac{y_1+2}{4}-\dfrac{y_2+y_1}{4}+\dfrac{y_3+y_2}{4}-\dfrac{2+y_3}{4}=0$.(…………10 分)

24. **解**：(1) $a_2=6$，$a_3=6$，$a_4=18$. (…………3 分)

(2) $a_n=2^n+2(-1)^n$.(*) (…………5 分)

证明如下：

① 当 $n=2$ 时，$a_2=6$，符合(*)式.

② 假设当 $n=k$ 时，(*)式成立，

即 $a_k=2^k+2(-1)^k$ 成立，

那么 $n=k+1$ 时，

因为 A_1 有 3 种标法，A_2 有 2 种标法，…，A_k 有 2 种标法，

若 A_{k+1} 仅与 A_k 不同，则有 2 种标法：

一种与 A_1 数不同，符合要求，有 a_{k+1} 种；

一种与 A_1 数相同，不符合要求，但相当于 k 个点的标法总数，有 a_k 种.

则有 $3\times2^k=a_{k+1}+a_k$. (………………8 分)

$\therefore$ $a_{k+1}=-a_k+3\times2^k=-2^k-2(-1)^k+3\times2^k=2^{k+1}+2(-1)^{k+1}$.

即 $n=k+1$ 时，(*)式也成立.

由①②知(*)式成立，即证. (………………………………10 分)