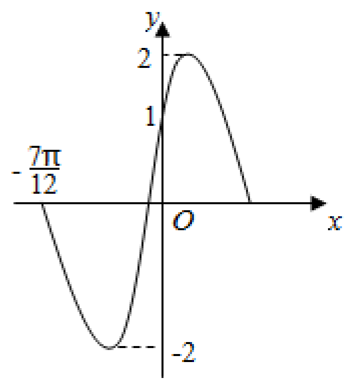
江苏省仪征中学2019届高考考前数学热身练5

一、填空题

1. 将一颗质地均匀的正方体骰子(每个面上分别写有数字1，2，3，4，5，6)先后抛掷2次，观察向上的点数，则点数之和是6的概率是______.

2. 命题：“存在$x\in R$，使$x^2+ax-4a<0$”为假命题，则实数a的取值范围是______.

3. 已知函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)$，$(A>0,\omega>0,|\varphi|<\pi)$的图象如图所示，则该函数的解析式是______.



4. 若函数$f(x)$为定义在R上的奇函数，当$x>0$时，$f(x)=x\ln x$，则不等式$f(x)<-e$的解集为______.

5. 四棱锥$P-ABCD$中，$PA\perp$底面$ABCD$，底面$ABCD$是矩形，$AB=2$，$AD=3$，$PA=\sqrt{3}$，点E为棱CD上一点，则三棱锥$E-PAB$的体积为______.

6. 若函数$f(x)=\begin{cases}x+2^x,x\le 0\\ ax-\ln x,x>0\end{cases}$，在其定义域上恰有两个零点，则正实数$a$的值为______.

7. 已知等差数列$\{a_n\}$的各项均为正数，$a_1=1$，且a_3，$a_4+\frac{5}{2}$，a_{11}成等比数列.若$p-q=10$，则$a_p-a_q=$______.

8. 在平面直角坐标系xOy中，已知圆C：$x^2+(y-3)^2=2$，点A是x轴上的一个动点，AP，AQ分别切圆C于P，Q两点，则线段PQ的取值范围是______.

9. 若x，y，z均为正实数，且$x^2+y^2+z^2=1$，则$\frac{(z+1)^2}{2xyz}$的最小值为______.

10. 设集合$M=\{a|a=\frac{x+y}{t},2^x+2^y=2^t$，其中$x$，$y$，$t$，$a$均为整数$\}$，则集合$M=$______.

二、解答题

11. 在$\triangle ABC$中，a，b，c分别是三内角A，B，C所对应的三边，已知$b^2+c^2=a^2+bc$

(1)求角A的大小；

(2)若$2\sin^2\frac{B}{2}+2\sin^2\frac{C}{2}=1$，试判断$\triangle ABC$的形状.

12. 已知椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率$e=\frac{\sqrt{6}}{3}$，一条准线方程为$x=\frac{3\sqrt{6}}{2}$.

(1)求椭圆C的方程；

(2)设G，H为椭圆上的两个动点，O为坐标原点，且$OG\perp OH$.

①当直线OG的倾斜角为$60°$时，求$\triangle GOH$的面积；

②是否存在以原点O为圆心的定圆，使得该定圆始终与直线GH相切？若存在，请求出该定圆方程；若不存在，请说明理由.

三、附加题

1、已知二阶矩阵A有特征值$\lambda_1 = 1$及对应的一个特征向量$\overrightarrow{e_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$和特征值$\lambda_2 = 2$及对应的一个特征向量$\overrightarrow{e_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，试求矩阵$A$.

2、在某次投篮测试中，有两种投篮方案：方案甲：先在 A 点投篮一次，以后都在 B 点投篮；方案乙：始终在 B 点投篮.每次投篮之间相互独立.某选手在 A 点命中的概率为$\frac{3}{4}$，命中一次记 3 分，没有命中得 0 分；在 B 点命中的概率为$\frac{4}{5}$，命中一次记 2 分，没有命中得 0 分，用随机变量ξ表示该选手一次投篮测试的累计得分，如果ξ的值不低于 3 分，则认为其通过测试并停止投篮，否则继续投篮，但一次测试最多投篮 3 次.

（1）若该选手选择方案甲，求测试结束后所得分ξ的分布列和数学期望.

（2）试问该选手选择哪种方案通过测试的可能性较大？请说明理由.

江苏省仪征中学 2019 届高考考前数学热身练 5（答案）

一、填空题

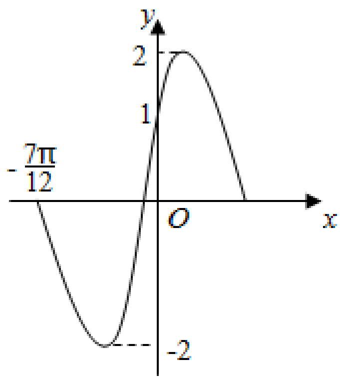
1. 将一颗质地均匀的正方体骰子(每个面上分别写有数字 1，2，3，4，5，6)先后抛掷 2 次，观察向上的点数，则点数之和是 6 的概率是______.

【答案】$\frac{5}{36}$

2. 命题：“存在$x \in R$，使$x^2 + ax - 4a < 0$”为假命题，则实数 a 的取值范围是______.

【答案】$[-16,0]$

3. 已知函数$y = A\sin(\omega x + \varphi)$，$(A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \pi)$的图象如图所示，则该函数的解析式是______.



【答案】$y = 2\sin(2x + \frac{\pi}{6})$

4. 若函数$f(x)$为定义在 R 上的奇函数，当$x > 0$时，$f(x) = x\ln x$，则不等式$f(x) < -e$的解集为______.

【答案】$(-\infty, -e)$

5. 四棱锥$P - ABCD$中，$PA \perp$底面 $ABCD$，底面 $ABCD$ 是矩形，$AB = 2$，$AD = 3$，$PA = \sqrt{3}$，点 E 为棱 CD 上一点，则三棱锥$E - PAB$的体积为______.

【答案】$\sqrt{3}$

6. 若函数$f(x) = \begin{cases} x+2^x, x\le 0 \\ ax - \ln x, x > 0 \end{cases}$，在其定义域上恰有两个零点，则正实数 a 的值为______.

【答案】$\frac{1}{e}$

7. 已知等差数列$\{a_n\}$的各项均为正数，$a_1 = 1$，且a_3，$a_4 + \frac{5}{2}$，a_{11}成等比数列.若$p - q = 10$，则 $a_p - a_q =$______.

【答案】15

8. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知圆 C：$x^2 + (y-3)^2 = 2$，点 A 是 x 轴上的一个动点，AP，AQ 分别切圆 C 于 P，Q 两点，则线段 PQ 的取值范围是______.

【答案】$[\frac{2\sqrt{14}}{3},2\sqrt{2})$

【解析】解：由题意，A在坐标原点时，$\sin\angle POC=\frac{\sqrt{2}}{3}$，$\therefore\cos\angle POC=\frac{\sqrt{7}}{3}$，

$\therefore\sin\angle POQ=\frac{2\sqrt{14}}{9}$，

$\therefore\sin\angle PCQ=\frac{2\sqrt{14}}{9}$，

$\therefore\cos\angle PCQ=-\frac{5}{9}$，

$\therefore PQ=\sqrt{2+2-2\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times(-\frac{5}{9})}=\frac{2\sqrt{14}}{3}$，

A在x轴上无限远时，PQ接近直径$2\sqrt{2}$，

$\therefore$线段PQ的取值范围是$[\frac{2\sqrt{14}}{3},2\sqrt{2})$，

故答案为：$[\frac{2\sqrt{14}}{3},2\sqrt{2})$.

9. 若x，y，z均为正实数，且$x^2+y^2+z^2=1$，则$\frac{(z+1)^2}{2xyz}$的最小值为______.

【答案】$3+2\sqrt{2}$

【解析】解：x，y，z均为正实数，且$x^2+y^2+z^2=1$，

可得$1-z^2=x^2+y^2\geq 2xy$，当且仅当$x=y$取得等号，

则$\frac{(z+1)^2}{2xyz}\geq\frac{(1+z)^2}{z(1-z^2)}=\frac{1+z}{z(1-z)}=\frac{1}{3-(1+z)-\frac{2}{1+z}}\geq\frac{1}{3-2\sqrt{2}}=3+2\sqrt{2}$.

当且仅当$1+z=\frac{2}{1+z}$，即$z=\sqrt{2}-1$，$x=y=\sqrt{\sqrt{2}-1}$，

取得最小值$3+2\sqrt{2}$.

故答案为：$3+2\sqrt{2}$.

10. 设集合$M=\{a|a=\frac{x+y}{t},2^x+2^y=2^t$，其中$x$，$y$，$t$，$a$均为整数$\}$，则集合$M=$______.

【答案】$\{0,1，3，4\}$

【解析】解：$\because 2^x+2^y=2^t$，

$\therefore 2^t=2^x(2^{x-y}+1)$因$x$、$y$、$t$、$a$均为整数，则$2^{x-y}+1$为2的整数幂，

则$x-y=0$，即$x=y$，则$2^t=2^{x+1}$，$t=x+1$，

则$a=\frac{x+y}{t}=\frac{2x}{x+1}$，

显然$x\neq-1$，

当$x=0$时：$y=0$，$t=1$，$a=0$，

当$x\neq0$时：由$a=\frac{2x}{x+1}$，x与$x+1$互质，则2为$x+1$的倍数，

则：$x=-3$，-2，1，

则$a=3$，4，1，

故$M=\{0,1，3，4\}$，

故答案为：$\{0,1，3，4\}$

二、解答题

11. 在$\triangle ABC$中，a，b，c分别是三内角A，B，C所对应的三边，已知$b^2+c^2=a^2+bc$

(1)求角A的大小；

(2)若$2\sin^2\frac{B}{2}+2\sin^2\frac{C}{2}=1$，试判断$\triangle ABC$的形状.

【答案】解：(1)在$\triangle ABC$中，$\because b^2+c^2=a^2+bc$，

$\therefore b^2+c^2-a^2=bc$，

$\therefore \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$,

$\therefore \cos A=\frac{1}{2}$,

又A是三角形的内角，故$A=\frac{\pi}{3}$

(2) $\because 2\sin^2\frac{B}{2}+2\sin^2\frac{C}{2}=1$，

$\therefore 1-\cos B+1-\cos C=1 \therefore \cos B+\cos C=1$，

由(1)的结论知，$A=\frac{\pi}{3}$，故$B+C=\frac{2\pi}{3}$

$\therefore \cos B+\cos(\frac{2\pi}{3}-B)=1$，

即$\cos B+\cos\frac{2\pi}{3}\cos B+\sin\frac{2\pi}{3}\sin B=1$，

即$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin B+\frac{1}{2}\cos B=1$

$\therefore \sin(B+\frac{\pi}{6})=1$，

又$0<B<\frac{2\pi}{3}$，$\therefore \frac{\pi}{6}<B+\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6} \therefore B+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$

$\therefore B=\frac{\pi}{3}$，$C=\frac{\pi}{3}$

故$\triangle ABC$是等边三角形.

12. 已知椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率$e=\frac{\sqrt{6}}{3}$，一条准线方程为$x=\frac{3\sqrt{6}}{2}$.

(1)求椭圆C的方程；

(2)设G，H为椭圆上的两个动点，O为坐标原点，且$OG\perp OH$.

①当直线 OG 的倾斜角为$60°$时，求$\triangle GOH$的面积；

②是否存在以原点 O 为圆心的定圆，使得该定圆始终与直线 GH 相切？若存在，请求出该定圆方程；若不存在，请说明理由．

【答案】解：(1)因为椭圆的离心率$e=\frac{\sqrt{6}}{3}$，一条准线方程为$x=\frac{3\sqrt{6}}{2}$.

所以$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，$\frac{a^2}{c}=\frac{3\sqrt{6}}{2}$，$a^2=b^2+c^2$，…(2分)

解得$a=3,b=\sqrt{3}$，

所以椭圆方程为$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{3}=1$. …(4分)

(2)①由$\begin{cases}y=\sqrt{3}x\\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$，解得$\begin{cases}x^2=\frac{9}{10}\\ y^2=\frac{27}{10}\end{cases}$，…(6分)

由$\begin{cases}y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x\\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$得$\begin{cases}x^2=\frac{9}{2}\\ y^2=\frac{3}{2}\end{cases}$，…(8分)

所以$OG=\frac{3\sqrt{10}}{5},OH=\sqrt{6}$，所以$S_{\triangle GOH}=\frac{3\sqrt{15}}{5}$. …(10分)

②假设存在满足条件的定圆，设圆的半径为 R，则$OG\cdot OH=R\cdot GH$

因为$OG^2+OH^2=GH^2$，故$\frac{1}{OG^2}+\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{R^2}$，

当 OG 与 OH 的斜率均存在时，不妨设直线 OG 方程为：$y=kx$，与椭圆方程联立，可得$x_G^2=\frac{9}{1+3k^2}$，

$y_G^2=\frac{9k^2}{1+3k^2}\therefore OG^2=\frac{9+9k^2}{1+3k^2}$

同理可得$OH^2=\frac{9+9k^2}{3+k^2}$

$\therefore\frac{1}{OG^2}+\frac{1}{OH^2}=\frac{4}{9}=\frac{1}{R^2}$，$\therefore R=\frac{3}{2}$

当 OG 与 OH 的斜率有一个不存在时，可得$\frac{1}{OG^2}+\frac{1}{OH^2}=\frac{4}{9}=\frac{1}{R^2}$

故满足条件的定圆方程为$x^2+y^2=\frac{9}{4}$.

三、附加题

1、已知二阶矩阵 A 有特征值$\lambda_1=1$及对应的一个特征向量$\overrightarrow{e_1}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$和特征值$\lambda_2=2$及对应的一个特征向量$\overrightarrow{e_2}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$，试求矩阵 A.

【答案】解：设矩阵$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，这里 a，b，c，$d\in R$

因为$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$是矩阵 A 的属于λ_1的特征向量，则有$\begin{bmatrix} 1-a & -b \\ -c & 1-d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，①，…(4分)

又因为$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$是矩阵 A 的属于$\lambda_2=2$的特征向量，则有$\begin{bmatrix} 2-a & -b \\ -c & 1-d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，②，…(6分)

根据①②，则有$\begin{cases} 1-a-b=0 \\ -c+1-d=0 \\ 2-a=0 \\ -c=0 \end{cases}$，…(8分)

从而$a=2$，$b=-1$，$c=0$，$d=1$，

因此$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.…(10分)

2、在某次投篮测试中，有两种投篮方案：方案甲：先在 A 点投篮一次，以后都在 B 点投篮；方案乙：始终在 B 点投篮.每次投篮之间相互独立.某选手在 A 点命中的概率为$\frac{3}{4}$，命中一次记 3 分，没有命中得 0 分；在 B 点命中的概率为$\frac{4}{5}$，命中一次记 2 分，没有命中得 0 分，用随机变量ξ表示该选手一次投篮测试的累计得分，如果ξ的值不低于 3 分，则认为其通过测试并停止投篮，否则继续投篮，但一次测试最多投篮 3 次.

（1）若该选手选择方案甲，求测试结束后所得分ξ的分布列和数学期望.

（2）试问该选手选择哪种方案通过测试的可能性较大？请说明理由.

【答案】（1）数学期望为 3.05，分布列见解析（2）选择方案甲

【解析】

（1）在 A 点投篮命中记作A,不中记作$\overline{A}$；在 B 点投篮命中记作B,不中记作$\overline{B}$，

其中$P(A)=\frac{3}{4},P(\overline{A})=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4},P(B)=\frac{4}{5},P(\overline{B})=1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$,

ξ的所有可能取值为$0,2,3,4$，则

$P(\xi=0)=P(\overline{A}\overline{B}\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{B})=\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{100}$,

$P(\xi=2)=P(\overline{A}B\overline{B})+P(\overline{A}\overline{B}B)=2\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{8}{100}$,

$P(\xi=3)=P(A)=\frac{3}{4}=\frac{75}{100}$,

$P(\xi=4)=P(\bar{A}BB)=P(\bar{A})P(B)P(B)=\frac{1}{4}\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{16}{100}$.

ξ的分布列为：$P(\xi=0)=\frac{1}{100}$，$P(\xi=2)=\frac{2}{25}$，$P(\xi=3)=\frac{3}{4}$，$P(\xi=4)=\frac{4}{25}$.

所以$E(\xi)=0\times\frac{1}{100}+2\times\frac{8}{100}+3\times\frac{75}{100}+4\times\frac{16}{100}=\frac{305}{100}=3.05$,

所以，ξ的数学期望为3.05.

（2）选手选择方案甲通过测试的概率为$P_1=P(\xi\geq 3)=\frac{75}{100}+\frac{16}{100}=\frac{91}{100}=0.91$，

选手选择方案乙通过测试的概率为

$P_2=P(\xi\geq 3)=2\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}+\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{112}{125}=\frac{896}{1000}=0.896$，

因为$P_2<P_1$，所以该选手应选择方案甲通过测试的概率更大．