

江苏省仪征中学 2018-2019 学年第一学期高三数学

周三练习 (11)

2018. 11. 28

范围：集合与逻辑、函数与导数、三角函数、平面向量、直线与圆、圆锥曲线、不等式

一. 填空题：本大题共 14 小题，每小题 5 分，计 70 分. 不需写出解答过程，请把答案写在答题纸的指定位置上.

1. 设全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ，若集合 $A = \{3, 4, 5\}$ ，则 $\complement_U A =$ _____.

2. 命题 “ $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 - 2x + 1 \geq 0$ ” 的否定是_____.

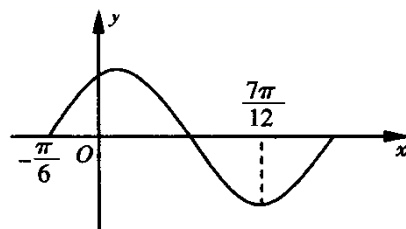
3. 已知向量 $\mathbf{a} = (2, m)$ ， $\mathbf{b} = (1, -2)$ ，且 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ ，则实数 m 的值是_____.

4. 函数 $f(x) = \lg(2-x) + \sqrt{2+x}$ 的定义域是_____.

5. 已知扇形的半径为 6，圆心角为 $\frac{\pi}{3}$ ，则扇形的面积为_____.

6. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若 $a_3 = 6$ ， $S_7 = 49$ ，则公差 $d =$ _____.

7. 设函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ (A, ω, φ 为常数，且 $A > 0, \omega > 0, 0 < \varphi < \pi$) 的部分图象如图所示，则 φ 的值为_____.



8. 在平面直角坐标系中，曲线 $y = e^x + 2x + 1$ 在 $x = 0$ 处的切线方程是_____.

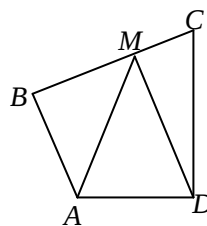
9. 已知奇函数 $y = f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的单调函数，若函数 $g(x) = f(x) + f(a - x^2)$ 只有一个零点，则实数 a 的值为_____.

10. 在 $\triangle ABC$ 中， $\sin A + 2 \sin B \cos C = 0$ ，则 A 的最大值是_____.

11. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x + \frac{2}{e}, & x < 1, \\ \frac{\ln x}{x}, & x \geq 1, \end{cases}$ ，若 $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$ ($x_1 < x_2 < x_3$)，则 $x_1 f(x_3)$ 的取值范围是_____.

12. 已知正实数 a, b 满足 $9a^2 + b^2 = 1$ ，则 $\frac{ab}{3a+b}$ 的最大值为_____.

13. 如图，在平面四边形 $ABCD$ 中， $AB \perp BC$ ， $AD \perp CD$ ， $\angle BCD = 60^\circ$ ， $CB = CD = 2\sqrt{3}$ ．若点 M 为边 BC 上的动点，则 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{DM}$ 的最小值为_____．



14. 函数 $f(x) = e^x |x - a|$ 在 $(-1, 2)$ 上单调递增，则实数 a 的取值范围是_____．

二、解答题：本大题共 6 小题，共计 90 分．请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15. (本题满分 14 分) 已知 $\mathbf{m} = (2\cos 2\alpha + 3, 2\sin 2\alpha)$ ， $\mathbf{n} = (\sin \beta, \cos \beta)$ ．

- (1) 若 $\beta = \frac{\pi}{6}$ ，且 $f(\alpha) = \mathbf{m} \cdot \mathbf{n}$ ，求 $f(\alpha)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的取值范围；
- (2) 若 $\mathbf{m} \parallel \mathbf{n}$ ，且 $\alpha + \beta$ 、 α 的终边不在 y 轴上，求 $\tan(\alpha + \beta) \tan \alpha$ 的值．

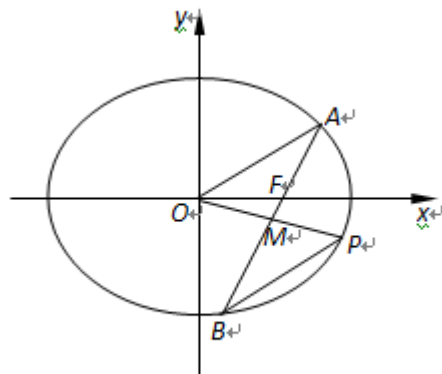
16. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，已知 $2\cos 2B - 4\cos(A + C) = 1$ ．

- (1) 求角 B 的值；
- (2) 若 $\cos A = \frac{\sqrt{13}}{13}$ ， $c = 3$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积．

17. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 过右焦点 $F(1, 0)$ 的直线 l 与椭圆 C 交于 A, B 两点, 且当点 B 是椭圆 C 的上顶点时, $FB = 2FA$, 线段 AB 的中点为 M .

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 延长线段 OM 与椭圆 C 交于点 P , 若 $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BP}$, 求此时 l 的方程.

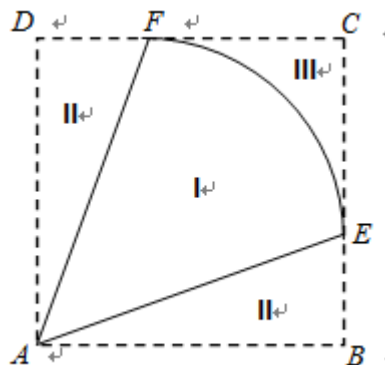


(第 17 题)

18. 某地拟规划种植一批芍药, 为了美观, 将种植区域 (区域 I) 设计成半径为 1km 的扇形 EAF , 中心角 $\angle EAF = \theta$ ($\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$). 为方便观赏, 增加收入, 在种植区域外围规划观赏区 (区域 II) 和休闲区 (区域 III), 并将外围区域按如图所示的方案扩建成正方形 $ABCD$, 其中点 E, F 分别在边 BC 和 CD 上. 已知种植区、观赏区和休闲区每平方千米的年收入分别是 10 万元、20 万元、20 万元.

(1) 要使观赏区的年收入不低于 5 万元, 求 θ 的最大值;

(2) 试问: 当 θ 为多少时, 年总收入最大?



(第 18 题)

19. 已知 $f(x) = e^x - \frac{a}{e^x}$ 是奇函数.

(1) 求实数 a 的值;

(2) 求函数 $y = e^{2x} + e^{-2x} - 2\lambda f(x)$ 在 $x \in [0, +\infty)$ 上的值域;

(3) 令 $g(x) = f(x) - 2x$, 求不等式 $g(x^3 + 1) + g(1 - 3x^2) < 0$ 的解集.

20. 设函数 $f(x) = \ln x - ax^2 + ax$, $a \in \mathbf{R}$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 求函数 $f(x)$ 的在点 $(2, f(2))$ 处的切线方程;

(2) 讨论函数 $y = f(x)$ 的单调性, 并写出单调区间;

(3) 当 $a > 0$ 时, 若函数 $y = f(x)$ 有唯一零点, 求实数 a 的值.

江苏省仪征中学 2018-2019 学年第一学期高三数学

周三练习 (11) 参考答案

2018. 11. 28

1. $\{1, 2\}$ 2. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x + 1 < 0$ 3. 1 4. $[-2, 2)$ 5. 6π 6. 1
7. $\frac{\pi}{3}$ 8. $y = 3x + 2$ 9. $-\frac{1}{4}$ 10. $\frac{\pi}{6}$ 11. $(-\frac{1}{e^2}, 0)$
12. $\frac{\sqrt{2}}{12}$ 13. $\frac{21}{4}$ 14. $a \leq -1$ 或 $a \geq 3$

15. 解: (1) 因为 $\beta = \frac{\pi}{6}$, 所以 $\mathbf{n} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

所以 $f(\alpha) = \mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = \cos 2\alpha + \sqrt{3} \sin 2\alpha + \frac{3}{2}$,2 分

即 $f(\alpha) = 2\sin(2\alpha + \frac{\pi}{6}) + \frac{3}{2}$,3 分

因为 $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 所以 $2\alpha + \frac{\pi}{6} \in [\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}]$; 所以 $\sin(2\alpha + \frac{\pi}{6}) \in [-\frac{1}{2}, 1]$;5 分

所以 $f(\alpha)$ 的取值范围是 $[\frac{1}{2}, \frac{7}{2}]$7 分

(2) 由 $\mathbf{m} \perp \mathbf{n}$, 所以 $(2\cos 2\alpha + 3)\cos \beta - 2\sin 2\alpha \sin \beta = 0$,9 分

所以 $2\cos(2\alpha + \beta) + 3\cos \beta = 0$,10 分

所以 $2\cos(\alpha + \beta)\cos \alpha - 2\sin(\alpha + \beta)\sin \alpha + 3\cos(\alpha + \beta)\cos \alpha + 3\sin(\alpha + \beta)\sin \alpha = 0$,

因为 $\alpha + \beta$ 、 α 的终边不在 y 轴上, 所以 $\cos(\alpha + \beta), \cos \alpha$ 均不为 0,

所以 $5\cos(\alpha + \beta)\cos \alpha + \sin(\alpha + \beta)\sin \alpha = 0$,12 分

因为所以 $\tan(\alpha + \beta)\tan \alpha = -5$14 分

解: (1) $\because A+B+C=\pi$

$$\therefore A+C=\pi-B$$

$$\therefore 2\cos 2B-4\cos(A+C)=1$$

$$\therefore 2(2\cos^2 B-1)-4\cos(\pi-B)=1$$

$$\therefore 4\cos^2 B+4\cos B-3=0$$

(2) $\because$ 在 $\triangle ABC$ 中, $A \in (0, \pi)$

$$\therefore \sin A = \sqrt{1-\cos^2 A}$$

$$= \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{13}}{13}\right)^2} = \frac{2\sqrt{39}}{13}$$

$$\therefore B = \frac{\pi}{3}, \therefore \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore A+B+C=\pi$$

$$\therefore \sin C = \sin(\pi-(A+B)) = \sin(A+B)$$

$$= \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$= \frac{2\sqrt{39}}{13} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{13} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{39}}{26}$$

$$\therefore (2\cos B-1)(2\cos B+3)=0$$

$$\cos B = \frac{1}{2} \text{ 或 } \cos B = -\frac{3}{2} \text{ (舍)}$$

$$\therefore \text{在 } \triangle ABC, B \in (0, \pi)$$

$$\therefore B = \frac{\pi}{3}.$$

$$\text{由正弦定理: } \frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}$$

$$\text{又 } c=3$$

$$\therefore \frac{3}{\frac{3\sqrt{39}}{26}} = \frac{b}{\frac{\sqrt{3}}{2}}, \text{ 则 } b = \frac{4\sqrt{13}}{3}$$

$$\begin{aligned} \therefore S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2}bc \sin A \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{4\sqrt{13}}{3} \times 3 \times \frac{2\sqrt{39}}{13} = 4\sqrt{3}. \end{aligned}$$

16.

(1) 由题意可以知 $\overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{FA}$, $F(1,0)$ 、 $B(0,b)$, 设 $A(x_0, y_0)$

$$\text{则 } \begin{cases} x_0 = \frac{3}{2} \\ y_0 = -\frac{b}{2} \end{cases} \because \text{点 } A \text{ 在椭圆 } C \text{ 上} \therefore \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{a^2} + \frac{\left(-\frac{b}{2}\right)^2}{b^2} = 1 \text{ 解得 } a^2 = 3$$

$$\therefore b^2 = a^2 - 1 = 2 \therefore \text{椭圆 } C \text{ 的方程为: } \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$$

17.

(2) 当直线 l 与垂直或与 x 轴重合时, 不满足题意

$\therefore$ 可设直线 l 方程为: $x = ty + 1$

设 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 、 $M(x_M, y_M)$ 、 $P(x_P, y_P)$

由 $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BP}$ 可知四边形 $OBPA$ 为平行四边形

$\therefore$ 点 M 为线段 OP 的中点

由 $M(x_M, y_M)$ 为线段 AB 的中点, 点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 在椭圆 C 上

$$\therefore \begin{cases} \frac{x_1^2}{3} + \frac{y_1^2}{2} = 1 \\ \frac{x_2^2}{3} + \frac{y_2^2}{2} = 1 \end{cases} \text{ 则 } \frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{3} + \frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{2} = 0$$

可得 $\frac{t \cdot x_M}{3} + \frac{y_M}{2} = 0$ 又 $\because x_M = ty_M + 1$

$$\text{可解得} \begin{cases} x_M = \frac{3}{2t^2+3} \\ y_M = \frac{-2t}{2t^2+3} \end{cases} \therefore \begin{cases} x_P = \frac{6}{2t^2+3} \\ y_P = \frac{-4t}{2t^2+3} \end{cases}$$

$\because$ 点 P 在椭圆 C 上

$$\therefore \frac{\left(\frac{6}{2t^2+3}\right)^2}{3} + \frac{\left(\frac{-4t}{2t^2+3}\right)^2}{2} = 1 \quad \text{整理得} \quad 4t^4 + 4t^2 - 3 = 0 \quad \text{解得} \quad t^2 = \frac{1}{2} \text{ 或 } t^2 = -\frac{3}{2} \text{ 舍去}$$

$$\therefore t = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{可知直线 } l \text{ 的方程为 } x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}y + 1 \text{ 即 } \sqrt{2}x \pm y - \sqrt{2} = 0.$$

解析: (1) 因为 $AF = AE = 1, AD = AB, \angle D = \angle B = \frac{\pi}{2}$, 所以 $\triangle ADF$ 与 $\triangle ABE$ 全等.

所以 $\angle DAF = \angle BAE = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$, 观赏区的面积为

$$S_{\text{II}} = 2 \times \frac{1}{2} DF \cdot AD = \sin \angle DAF \cdot \cos \angle DAF = \frac{1}{2} \sin 2\angle DAF = \frac{1}{2} \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{2} \cos \theta,$$

要使得观赏区的年收入不低于 5 万元, 则要求 $S_{\text{II}} \geq \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$, 即 $\cos \theta \geq \frac{1}{2}$, 结合 $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$ 可

知 $\frac{\pi}{4} < \theta \leq \frac{\pi}{3}$, 即 θ 的最大值为 $\frac{\pi}{3}$.

$$(2) \text{ 种植区的面积为 } S_{\text{I}} = \frac{1}{2} AF \cdot AE \cdot \theta = \frac{1}{2} \theta,$$

18. 正方形面积为 $S = AD^2 = \cos^2 \angle DAF = \frac{1 + \cos 2\angle DAF}{2} = \frac{1 + \sin \theta}{2},$

设年总收入为 $W(\theta)$ 万元, 则

$$W(\theta) = 10S_{\text{I}} + 20S_{\text{II}} + 20S_{\text{III}} = 10S_{\text{I}} + 20(S - S_{\text{I}}) = 5\theta + 20\left(\frac{1 + \sin \theta}{2} - \frac{1}{2}\theta\right) = 10 + 10\sin \theta - 5\theta,$$

其中 $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$, 求导可得 $W'(\theta) = 10\cos \theta - 5$.

当 $\frac{\pi}{4} < \theta \leq \frac{\pi}{3}$ 时, $W'(\theta) > 0$, $W(\theta)$ 递增; 当 $\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2}$ 时, $W'(\theta) < 0$, $W(\theta)$ 递减.

所以当 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 时, $W(\theta)$ 取得最大值, 此时年总收入最大.

19. 解: (1) 函数的定义域为 R , 因为 $f(x)$ 为奇函数, 由 $f(-x) = -f(x)$ 可知, $f(0) = 0$, 所以 $1 - a = 0$, 所以 $a = 1$;3 分

当 $a = 1$ 时, $f(-x) = e^{-x} - \frac{1}{e^{-x}} = -e^x + \frac{1}{e^x} = -f(x)$, 此时 $f(x)$ 为奇函数.4 分

(2) 令 $e^x - \frac{1}{e^x} = t$ ($t \geq 0$), 所以 $e^{2x} + \frac{1}{e^{2x}} = t^2 + 2$

所以 $h(t) = t^2 - 2\lambda t + 2$, 对称轴 $t = \lambda$,5 分

①当 $\lambda \leq 0$ 时, $h(t) \in [h(0), +\infty)$, 所求值域为 $[2, +\infty)$;7 分

②当 $\lambda > 0$ 时, $h(t) \in [h(\lambda), +\infty)$, 所求值域为 $[2 - \lambda^2, +\infty)$;9 分

(3) 因为 $f(x) = e^x - \frac{1}{e^x}$ 为奇函数, 所以 $g(-x) = f(-x) - 2(-x) = -f(x) + 2x = -g(x)$,

所以 $g(x) = f(x) - 2x$ 为奇函数,

所以 $g(x^3 + 1) + g(1 - 3x^2) < 0$ 等价于 $g(x^3 + 1) < g(3x^2 - 1)$,10 分

又 $g'(x) = f'(x) - 2 = e^x + \frac{1}{e^x} - 2 \geq 2 - 2 = 0$ 当且仅当 $x = 0$ 时, 等号成立,

所以 $g(x) = f(x) - 2x$ 在 R 上单调增,

所以 $x^3 + 1 < 3x^2 - 1$,13 分

即 $x^3 - 3x^2 + 2 < 0$, 又 $x^3 - 3x^2 + 2 = (x - 1)(x^2 - 2x - 2) < 0$,

所以 $x < 1 - \sqrt{3}$ 或 $1 < x < 1 + \sqrt{3}$15 分

所以不等式的解集是 $(-\infty, 1 - \sqrt{3}) \cup (1, 1 + \sqrt{3})$16 分

20.

解:

$$f'(x) = -\frac{2ax^2 - ax - 1}{x}$$

① $a = 1$ 时, $f(2) = \ln 2 - 2$, $f'(2) = \frac{5}{2}$, 所以切线为: $y = \frac{5}{2}x - 7 + \ln 2$

② 分类讨论

$-8 \leq a \leq 0$, $f'(x) \geq 0$, 在定义域上单调递增

$$a > 0 \Rightarrow x \in \left(0, \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{8}{a}}}{4} \right), f(x) \uparrow; x \in \left(\frac{1 + \sqrt{1 + \frac{8}{a}}}{4}, +\infty \right), f(x) \downarrow$$

$$a < 0 \Rightarrow x \in \left(0, \frac{1 - \sqrt{1 + \frac{8}{a}}}{4} \right), f(x) \uparrow; x \in \left(\frac{1 - \sqrt{1 + \frac{8}{a}}}{4}, \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{8}{a}}}{4} \right); f(x) \downarrow$$

$$, x \in \left(\frac{1 + \sqrt{1 + \frac{8}{a}}}{4}, +\infty \right) f(x) \uparrow$$

③令极大值横坐标值为： x_1 ，那么 $2ax_1^2 - ax_1 - 1 = 0$

$$x \in (0, 1), f(x) < \ln x + a, \{y \mid y = \ln x + a\} \supset (-\infty, 0)$$

$$x \in (1, +\infty), f(x) < x - 1 - ax^2 + ax,$$

$$\{y \mid y = -ax^2 + (a+1)x - 1, x \in (1, +\infty)\} \supset (-\infty, 0)$$

故函数两端都无穷小

$$f(x) \text{ 有唯一零点} \Leftrightarrow f(x_1) = \ln x_1 + \frac{a}{2}x_1 - \frac{1}{2} = 0$$

$$p(a) = \ln \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{8}{a}}}{4} + \frac{a}{2} \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{8}{a}}}{4} - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow a = 1$$

这里要证明唯一解：

$$\text{令 } t = \sqrt{1 + \frac{8}{a}}, \quad p(a) = \ln \frac{1+t}{2} + \frac{1}{t-1} - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \left(\ln \frac{1+t}{2} + \frac{1}{t-1} - \frac{1}{2} \right)' = \frac{t^2 - t}{(t+1)(t-1)^2} > 0 \quad \text{得证}$$

综上所述： $a = 1$