2020~2021 学年度苏锡常镇四市高三教学情况调研（一）

数学答案

2021.03

一、选择题：本题共 **8** 小题，每小题 **5** 分，共 **40** 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1	2	3	4	5	6	7	8
B	**D**	**A**	**C**	**A**	**C**	**A**	**B**

二、选择题：本题共 **4** 小题，每小题 **5** 分，共 **20** 分，在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 **5** 分。部分选对的特 **2** 分，有选错的得 **0** 分。

9	10	11	12
BCD	**ABD**	**ABD**	**AC**

三、填空题：本题共 **4** 小题，每小题 **5** 分，共 **20** 分。

13.-3

14.z=1+i

15. $\frac{7}{32}$

16. $\frac{\sqrt{11}}{12}$ **，3**

三、解答题：本题共 **6** 小题，共 **70** 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17.【解】在ΔABD中，$\frac{BD}{\sin\angle BAD}=\frac{AB}{\sin\angle BDA}$，所以$\sin\angle BDA=\frac{AB\sin\frac{\pi}{6}}{BD}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

因为$\angle BDA\in(0,\pi)$，所以$\angle BDA=\frac{2\pi}{3}$，或$\angle BDA=\frac{\pi}{3}$，当$\angle BDA=\frac{2\pi}{3}$时，$\angle B=\frac{\pi}{6}$，

所以$\angle C=\frac{\pi}{3}$，当$\angle BDA=\frac{\pi}{3}$时，$\angle B=\frac{\pi}{2}$（舍）所以$\angle C=\frac{\pi}{3}$；

（2）因为$AB=\sqrt{3}BD$，$CD=2BD$，所以$AB=\frac{\sqrt{3}}{3}BC$，$AC=\frac{\sqrt{6}}{3}BC$，

$$\overline{AD}=\overline{AB}+\overline{BD}=\overline{AB}+\frac{1}{3}\overline{BC}=\overline{AB}+\frac{1}{3}(\overline{AC}-\overline{AB})=\frac{2}{3}\overline{AB}+\frac{1}{3}\overline{AC},$$

所以$AD^2=\frac{4}{9}AB^2+\frac{1}{9}AC^2$，

所以$BC=6\sqrt{2},AB=2\sqrt{6},AC=4\sqrt{3}$，所以$S_{\Delta ABC}=12\sqrt{2}$．

18.【解】:（1）因为$|q|>1$，且各项均为整数，所以连续四项为

$-24,48,-96,192$，所以公比$q=-2$，取$a_1=3$，则$a_n=3\times 2^{n-1}$；

（2）$S_n=\dfrac{a_1[1-(-2)^n]}{3}$，当$n$为奇数时，$S_n=\dfrac{a_1(1+2^n)}{3}$，

$S_{n+1}=\dfrac{a_1(1-2^{n+1})}{3}$，$S_{n+2}=\dfrac{a_1(1+2^{n+2})}{3}$，

所以$S_{n+1}+S_{n+2}=\dfrac{a_1(2+2^{n+1})}{3}=2S_n$，

当n为偶数时，$S_n=\dfrac{a_1(1-2^n)}{3}$，$S_{n+1}=\dfrac{a_1(1+2^{n+1})}{3}$，

$S_{n+2}=\dfrac{a_1(1-2^{n+2})}{3}$，$S_{n+1}+S_{n+2}=\dfrac{a_1(2-2^{n+1})}{3}=2S_n$，

所以对S_n中的任意连续三项，经顺序调整后可以构成等差数列.

19.【解】取AD的中点G，连接PG,CG，因为ΔAPD是等腰直角三角形，所以$PG\perp AD$，因为$AD=2$，所以$PG=1$，因为$AG=1$，$AD//BC$，所以$AG//BC$且$AG=BC=1$，所以$AGCB$是平行四边形，所以$AB//CG$，又因为$AB\perp AD$，所以$CG\perp AD$，又

$CG=1,PC=\sqrt{2},PG=1$，所以$PG\perp CG$，建立如图空间直角坐标系，则$A(0,-1,1),P(0,0,1),C(1,0,0)$，$B(1,-1,0)$，

（1）$\overrightarrow{PB}=(1,-1,-1)$，$\overrightarrow{PA}=(0,-1,-1),\overrightarrow{AC}=(1,1,0)$，设平面$PAC$法

量为$\mathbf{n}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\mathbf{n}\cdot\overrightarrow{PA}=-y-z=0\\ \mathbf{n}\cdot\overrightarrow{PC}=x+y=0\end{cases}$，取$y=-1,x=1,z=1$，则$\mathbf{n}=(1,-1,1)$，则$\cos<\overrightarrow{PB},\mathbf{n}>=\frac{1+1-1}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{1}{3}$，所以$PB$与平面$PAC$所成角的正弦值为$\frac{1}{3}$；

（2）$D(0,1,0)$，所以$E(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，所以$F(\frac{1}{2},-\frac{1}{4},\frac{1}{4})$，$\overrightarrow{AF}=(\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{1}{4})$，则$\mathbf{n}\cdot\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=0$，所以$AF$在平面$PAC$中，所以$F$在平面$PAC$中.

20.【解】：记甲方案检测的次数是X，则$X\in\{1,2,3,4,5\}$，记乙方案检测的次数是Y，则$Y\in\{2,3\}$

（1）记两种方案检测的次数相同为事件A，则

$P(A)=P(X=2,Y=2)+P(X=3,Y=3)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{9}$，

所以两种方案检测的次数相同的概率为$\frac{1}{9}$；

（2）$P(X=1)=P(X=2)=P(X=3)=P(X=4)=\frac{1}{6}$，$P(X=5)=\frac{1}{3}$

所以$E(X)=\frac{10}{3}$，$P(Y=2)=\frac{1}{3},P(Y=2)=\frac{2}{3}\times1=\frac{2}{3}$，

$E(Y)=\frac{8}{3}$，所以采用乙方案.

21.（1）设过点$(4,0)$的直线为$y=k(x-4)$交于椭圆$D(x_1,y_1)$ $E(x_2,y_2)$

联立$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+y^2=1\\ y=k(x-4)\end{cases}$ 消去y得 $(4k^2+1)x^2-32k^2x+64k^2-4=0$

$\Rightarrow\begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{32k^2}{4k^2+1}\\ x_1x_2=\dfrac{64k^2-4}{4k^2+1}\end{cases}$ $y_1y_2=k^2[x_1x_2-4(x_1+x_2)+16]=\dfrac{12k^2}{4k^2+1}$ 又因为以线段DE

为直径的圆经过原点，则$\vec{OD}\cdot\vec{OE}=x_1x_2+y_1y_2=\dfrac{76k^2-4}{4k^2+1}=0\Rightarrow k=\pm\dfrac{\sqrt{19}}{19}$

则所求直线方程为$y=\pm\dfrac{\sqrt{19}}{19}(x-4)$

（2）已知椭圆$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$的离心率为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，右准线直线n的方程为$x=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$，已知直线l上

只有一点到F的距离与到直线n的距离之比为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，可以得出直线l与椭圆相切，设直线l的

方程为：$y=kx+m$，联立$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+y^2=1\\ y=kx+m\end{cases}$消去$y$得到：$(4k^2+1)x^2+8kmx+4m^2-4=0$

$\Delta=64k^2m^2-4(4k^2+1)(4m^2-4)=0 \qquad \Rightarrow m^2=4k^2+1$①

联立$\begin{cases}x=\sqrt{3}\\ y=kx+m\end{cases}\Rightarrow FM=\sqrt{3}k+m$ $\begin{cases}x=\dfrac{4}{\sqrt{3}}\\ y=kx+m\end{cases}\Rightarrow$点$N$坐标为$(\dfrac{4}{\sqrt{3}},\dfrac{4k}{\sqrt{3}}+m)$

得到$FN=\sqrt{(\dfrac{4}{\sqrt{3}}-\sqrt{3})^2+(\dfrac{4}{\sqrt{3}}k+m)^2}$

$\dfrac{FM^2}{FN^2}=\dfrac{3k^2+2\sqrt{3}km+m^2}{\dfrac{1}{3}+\dfrac{16}{3}k^2+\dfrac{8km}{\sqrt{3}}+m^2}$由①式$\Rightarrow\dfrac{FM^2}{FN^2}=\dfrac{3}{4}\Rightarrow\dfrac{FM}{FN}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

22．（12 分）

【解】：（1）设$h(x)=x^2-2\ln x-1(x>0)$，求导略，

$\therefore h(x)_{\min}=0\ \therefore f(1)\le g(1)\le 1$

又$\because f(1)=1\ \therefore g(1)=1$

设$g(a)=a(x-1)+1$又$\because g(x)\le x^2$

$\therefore x^2-ax+a-1\ge 0$ 在$(0,+\infty)$上恒成立

$\therefore (x-1)(x+1-a)\ge 0$ 在$(0,+\infty)$上恒成立

$\therefore a-1=1\ \therefore a=2\quad \therefore g(x)=2x-1$

又$\because m(x)=1+2\ln x-2x+1=2\ln x-2x+2$

$m'(x)=\dfrac{2}{x}-2=\dfrac{2-2x}{x}$

$\therefore m(x)_{\max}=0$，$\therefore 1+2\ln x\le 2x-1$

综上$g(x)=2x-1$

（2）$\dfrac{f(x)}{f\left(\dfrac{1}{x}\right)}=x^2$，则$\dfrac{1+m\ln x}{1-m\ln x}=x^2(x>0)$

$\therefore n(t)=0$ 在$(0,+\infty)$恒有一解，即$\dfrac{f(x)}{f\left(\dfrac{1}{x}\right)}=x^2$只有一解

②$m<0$时，$n'(t)\le 0\ \therefore n(t)$在$t\in(0,+\infty)$上递减

又$\because n(1)=0\ \therefore n(t)$在$(0,+\infty)$恒有一解

③$0<m<1$时，$n'(t)=\dfrac{mt^2+(2m-4)t+m}{t(t+1)^2}$

设$\varphi(t)=mt^2+(2m-4)t+m$，$\varphi(1)=m-4\le 0$，$\varphi(0)=m$

$\therefore \varphi(t)=0$ 在$(0,+\infty)$上有二解，且$0<t_1<1<t_2$

又$\because n(1)=0$，$\therefore n(t_1)>0$，$n(t_2)>0$

当$t>e^{\frac{2}{m}}$时，$n(t)=m\ln t+\dfrac{4}{t+1}-2>2+\dfrac{4}{t+1}-2>0$

$\therefore n(t)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 恒有一解，即 $\dfrac{f(x)}{f\left(\dfrac{1}{x}\right)}=x^2$ 只有一解

②$m<0$ 时，$n'(t)\le 0$ $\therefore n(t)$ 在 $t\in(0,+\infty)$ 上递减

又$\because$ $n(1)=0$ $\therefore n(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 恒有一解

③$0<m<1$ 时，$n'(t)=\dfrac{mt^2+(2m-4)t+m}{t(t+1)^2}$

设 $\varphi(t)=mt^2+(2m-4)t+m$，$\varphi(1)=m-4\le 0$，$\varphi(0)=m$

$\therefore \varphi(t)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有二解，且 $0<t_1<1<t_2$

又$\because$ $n(1)=0$，$\therefore n(t_1)>0$，$n(t_2)>0$

当 $t>e^{\frac{2}{m}}$ 时，$n(t)=m\ln t+\dfrac{4}{t+1}-2>2+\dfrac{4}{t+1}-2>0$

$\therefore n(t)$ 在 $(t_0,+\infty)$ 上恰有一根

当 $0<t<1$ 时，$\dfrac{4}{1+t}\in(2,4)$

当 $t<e^{-\frac{2}{m}}$ 时，$m\ln t<-2$

$m\ln t+\dfrac{4}{1+t}-2<-2+4-2<0$

$\therefore \exists t_0\in(0,1)$ 且 $t_0<e^{-\frac{2}{m}}$，解得 $n(t_0)<0$

$\therefore n(t)$ 在 $(0,t_1)$ 上恰有一根，$n(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上恰有三根

综上，（1）$m\ge 1$ 或 $m\le 0$ 时，$\dfrac{f(x)}{f\left(\dfrac{1}{x}\right)}=x^2$ 恰有一根

（2）$0<m<1$ 时，$\dfrac{f(x)}{f\left(\dfrac{1}{x}\right)}=x^2$ 恰有三根