江苏省仪征中学 2018-2019 学年第一学期高三数学

周三练习（14）

2018. 12. 19

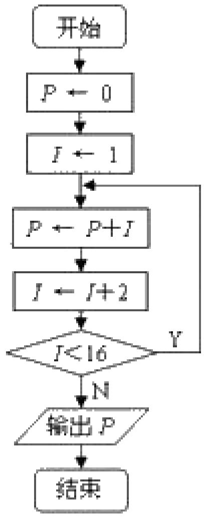
范围：集合与逻辑、函数与导数、三角函数、平面向量、直线与圆 、圆锥曲线、不等式、数列、立体几何

一．填空题：本大题共 14 小题，每小题 5 分，计 70 分. 不需写出解答过程，请把答案写在答题纸的指定位置上.

1. 设集合 $A=\{x\,|\,|x|\le 2\}, B=\{y\,|\,y=1-x^2\}$，则 $A\cap B=$______.

2. 已知 $\dfrac{m+2i}{i^{2019}}=n+i(m,n\in R)$，其中 i 为虚数单位，则 $n-m=$________.

3. 函数 $f(x)$ 的定义域是 $[-1,1]$，则函数 $f(\log_{\frac{1}{2}}x)$ 的定义域为________.



4. 如右图，程序执行后输出的结果为________.

5. 在 ΔABC 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c. 已知 $a=3$，$b=5$，$c=7$，则 ΔABC 的面积为________.

6. 等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_3=4$，$S_3=12$，则公比 $q=$_________.

7. 已知 $\Omega=\{(x,y)\,|\,x+y<6,x>0,y>0\}$，$A=\{(x,y)\,|\,x<4,y>0,x-2y>0\}$，若向区域 Ω 上随机投掷一点 P，则点 P 落入区域 A 的概率为_____.

8. 已知 $\vec{a}=(1,2)$，$\vec{b}=(1,1)$，且 $\vec{a}$ 与 $\vec{a}+\lambda\vec{b}$ 的夹角为锐角，那么实数 λ 的取值范围为__________.

9. 已知 $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=\dfrac{2}{3}$，$\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，则 $\cos\left(2\alpha+\dfrac{2\pi}{3}\right)=$_____.

10. 若等差数列 $\{a_n\}$ 的前 4 项和为 26，末 4 项和为 110，前 n 项和为 187，则项数 $n=$_____.

11. 在平面直角坐标系中，O 为原点，$A(-1,0)$，$B(0,\sqrt{3})$，$C(3,0)$，动点 D 满足 $|\overrightarrow{CD}|=1$，则 $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}|$ 的最大值是_____.

12. 在等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=7$，公差为d，前n项和为S_n，当且仅当$n=8$时S_n取得最大值，

则d的取值范围为______.

13. 已知正实数x、y满足$\dfrac{1}{2x+y}+\dfrac{4}{2x+3y}=1$，则$x+y$的最小值为______.

14. 已知函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+3}{2}, x\le -1\\ \ln(x+2), x>-1\end{cases}$，如果存在实数$m$，$n$，其中$m<n$，使得$f(m)=f(n)$，

则$n-m$的取值范围是__________.

二. 解答题：本大题共 6 小题，计 90 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤，请把答案写在答题纸的指定区域内.

15. 在ΔABC中，角 A，B，C 所对边分别为 a，b，c，且$1+\dfrac{\tan A}{\tan B}=\dfrac{2c}{b}$.

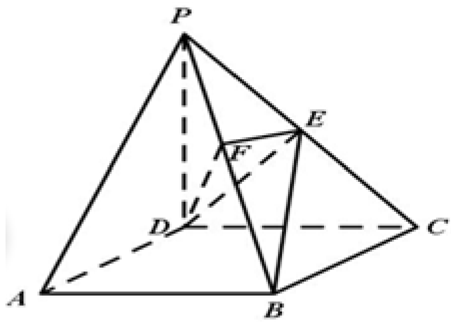
（1）求角A；

（2）若$\vec{m}=(0,-1)$，$\vec{n}=\left(\cos B, 2\cos^2\dfrac{C}{2}\right)$，试求$|\vec{m}+\vec{n}|$的最小值.

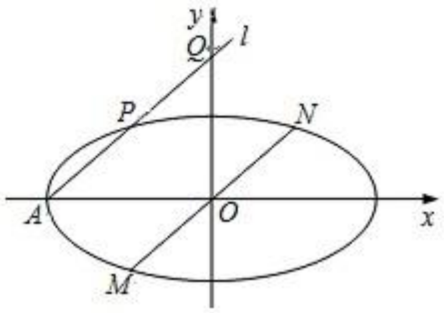
16. 如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$是正方形，侧棱$PD\perp$底面$ABCD$，$PD=DC$，点E是PC中点，作$EF\perp PB$，交PB于点F.

(1) 求证：$PA//$平面EDB；

(2) 求证：$PB\perp$平面EFD.



17. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，过椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 的左顶点 A 作直线 l，与椭圆 C 和 y 轴正半轴分别交于点 P， Q.



(1)若 $AP=PQ$，求直线 l 的斜率；

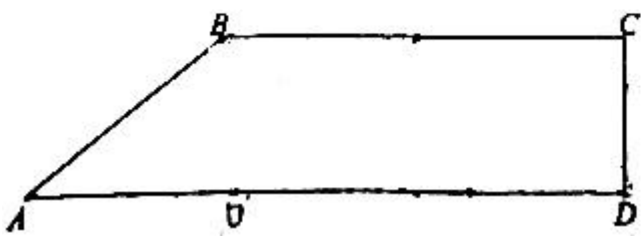
(2)过原点 O 作直线 l 的平行线，与椭圆 C 交于点 M， N，

求证： $\dfrac{AP\cdot AQ}{MN^2}$ 为定值.

18. 如图，某森林公园有一直角梯形区域 $ABCD$，其四条边均为道路， $AD\,//\,BC$， $\angle ADC=90°$， $AB=5$ 千米， $BC=8$ 千米， $CD=3$ 千米，现甲、乙两管理员同时从 A 地出发匀速前往 D 地，甲的路线是 AD，速度为 6 千米/小时，乙的路线是 $ABCD$，速度为 v 千米/小时.

(1) 若甲、乙两管理员到达 D 的时间相差不超过 15 分钟，求乙的速度 v 的取值范围；

(2) 已知对讲机有效通话的最大距离是 5 千米，若乙先到达 D，且乙从 A 到 D 的过程中始终能用对讲机与甲保持有效通话，求乙的速度 v 的取值范围.



19. 设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n， 数列$\{b_n\}$满足：$b_n = na_n$ ， 且数列$\{b_n\}$的前n项和为$(n-1)S_n + 2n\ (n \in N^*)$.

（1）求a_1，a_2的值；

（2）求证：数列$\{S_n + 2\}$是等比数列；

（3）抽去数列$\{a_n\}$中的第 1 项，第 4 项，第 7 项，…，第 3n-2 项，…余下的项顺序不变，组成一个新数列$\{c_n\}$，若$\{c_n\}$的前 n 项和为T_n，求证：$\frac{12}{5} < \frac{T_{n+1}}{T_n} \le \frac{11}{3}$.

20. 已知函数 $f(x) = ax + \ln x (a \in R)$， $g(x) = \frac{x^2}{x - \ln x}$

(1) 当$a = 1$时，求 $f(x)$ 的单调增区间;

(2) 若$h(x) = f(x) - g(x)$恰有三个不同的零点$x_1, x_2, x_3 (x_1 < x_2 < x_3)$

① 求实数a的取值范围;

② 求证: $\left(1 - \frac{\ln x_1}{x_1}\right)^2 \left(1 - \frac{\ln x_2}{x_2}\right)\left(1 - \frac{\ln x_3}{x_3}\right) = 1$.

周三练习（14）参考答案

一、 填空题

1. $\{x\,|\,-2\le x\le 1\}$　　2. -3　　3. $\left[\frac{1}{2},2\right]$　　4. 64　　5. $\frac{15\sqrt{3}}{4}$　　6. 1或$-\frac{1}{2}$

7. $\frac{2}{9}$　　8. $\left(-\frac{5}{3},0\right)\cup(0,+\infty)$　　9. $-\frac{2+\sqrt{15}}{6}$　　10. 11　　11. $1+\sqrt{7}$　　12. $\left(-1,-\frac{7}{8}\right)$

13. $\frac{9}{4}$　　14. $[3-2\ln 2,2)$

二. 解答题：

15.解：（Ⅰ） $1+\frac{\tan A}{\tan B}=\frac{2c}{b}\Rightarrow 1+\frac{\sin A\cos B}{\sin B\cos A}=\frac{2\sin C}{\sin B}$ 即 $\frac{\sin B\cos A+\sin A\cos B}{\sin B\cos A}=\frac{2\sin C}{\sin B}$，

$\therefore \frac{\sin(A+B)}{\sin B\cos A}=\frac{2\sin C}{\sin B}$， $\therefore \cos A=\frac{1}{2}$　$\because 0<A<\pi$， $\therefore A=\frac{\pi}{3}$.

（Ⅱ） $m+n=(\cos B,2\cos^2\frac{C}{2}-1)=(\cos B,\cos C)$，

$\therefore |m+n|^2=\cos^2 B+\cos^2 C=\cos^2 B+\cos^2(\frac{2\pi}{3}-B)=1-\frac{1}{2}\sin(2B-\frac{\pi}{6})$.

$\because A=\frac{\pi}{3}$， $\therefore B+C=\frac{2\pi}{3}$， $\therefore B\in(0,\frac{2\pi}{3})$. 从而 $-\frac{\pi}{6}<2B-\frac{\pi}{6}<\frac{7\pi}{6}$

$\therefore$当 $\sin(2B-\frac{\pi}{6})$ ＝1，即 $B=\frac{\pi}{3}$ 时，$|\vec{m}+\vec{n}|^2$ 取得最小值 $\frac{1}{2}$ 所以，$|\vec{m}+\vec{n}|_{\min}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

16. 略

17.

(1)$A(-2,0)$，设 $Q(0,m)\ (m>0)$　，

$\because AP\quad PQ,\therefore P\left(-1,\frac{m}{2}\right)$　，

代入椭圆方程得：$\frac{1}{4}+\frac{m^2}{4}\quad 1$ ，

解得 $m\quad \sqrt{3}$ ，

$\therefore$ 直线 l 的斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(2)证明：设直线 l 的斜率为 $k\left(k>\frac{1}{2}\right)$，直线 l 的方程为：$y\quad k(x+2)$　，

令 $x\quad 0$ 得 $y\quad 2k$，即 $Q(0,2k)$ ，

$\therefore AQ\quad \sqrt{4k^2+4}\quad 2\sqrt{k^2+1}$.

联立方程组 $\begin{cases} y\quad k(x+2) \\ \frac{x^2}{4}+y^2\quad 1 \end{cases}$，消元得：$\left(1+4k^2\right)x^2+16k^2x+16k^2-4\quad 0$　，

$\therefore x_1+x_2\quad \frac{-16k^2}{1+4k^2}, x_1x_2\quad \frac{16k^2-4}{1+4k^2}$　，

$\therefore AP\quad \sqrt{1+k^2}$

$\cdot\sqrt{\frac{256k^4}{\left(1+4k^2\right)^2}-\frac{64k^2-16}{1+4k^2}}\quad \frac{4\sqrt{1+k^2}}{1+4k^2}$.

$\therefore AP\cdot AQ\quad \frac{8\left(k^2+1\right)}{1+4k^2}$.

直线 MN 的方程为 $y \quad kx$ ，

联立方程组 $\begin{cases} y \quad kx \\ \dfrac{x^2}{4}+y^2 \quad 1 \end{cases}$，得 $\left(1+4k^2\right)x^2-4 \quad 0$ ，

设 $N\left(x_3,y_3\right), M\left(-x_3,-y_3\right)$ ，

则 $\begin{cases} x_3 \quad \dfrac{2}{\sqrt{1+4k^2}} \\ y_3 \quad \dfrac{2k}{\sqrt{1+4k^2}} \end{cases}$ ，

$\therefore MN \quad 2ON \quad 2\sqrt{\dfrac{4}{1+4k^2}+\dfrac{4k^2}{1+4k^2}}$ ，

$4\sqrt{\dfrac{1+k^2}{1+4k^2}}$

$\therefore \dfrac{AP\cdot AQ}{MN^2} \quad \dfrac{8\left(k^2+1\right)}{1+4k^2}\cdot\dfrac{1+4k^2}{16\left(1+k^2\right)} \quad \dfrac{1}{2}$

.

$\therefore \dfrac{AP\cdot AQ}{MN^2}$ 为定值。

18.

(1)由题意，可得 $AD \quad 12$ 千米．

由题可知 $\left|\dfrac{12}{6}-\dfrac{16}{v}\right|\leqslant\dfrac{1}{4}$ 解得 $\dfrac{64}{9}\leqslant v\leqslant\dfrac{64}{7}$.

(2)经过 t 小时，甲、乙之间的距离的平方为 $f(t)$.

由于先乙到达 D 地，故 $\dfrac{16}{v}<2$ ，即 $v>8$.

①当 $0<vt\leqslant 5$, 即 $0<t\leqslant\dfrac{5}{v}$ 时，

$f(t) \quad (6t)^2+(vt)^2-2\times 6t\times vt\times\cos\angle DAB \quad \left(v^2-\dfrac{48}{5}v+36\right)t^2.$

因为 $v^2-\dfrac{48}{5}v+36>0$,所以当 $t \quad \dfrac{5}{v}$ 时，$f(t)$ 取最大值，

所以 $\left(v^2-\dfrac{48}{5}v+36\right)\times\left(\dfrac{5}{v}\right)^2\leqslant 25$ 解得 $v\geqslant\dfrac{15}{4}$.

②当 $5<vt\leqslant 13$, 即 $\dfrac{5}{v}<t\leqslant\dfrac{13}{v}$ 时，

$f(t) \quad (vt-1-6t)^2+9 \quad (v-6)^2\left(t-\dfrac{1}{v-6}\right)^2+9.$

因为 $v>8$, 所以 $\dfrac{1}{v-6}<\dfrac{5}{v}$, $(v-6)^2>0$,所以当 $t \quad \dfrac{13}{v}$ 时，$f(t)$ 取最大值，

所以 $(v-6)^2\left(\dfrac{13}{v}-\dfrac{1}{v-6}\right))^2+9\leqslant 25$ 解得 $\dfrac{39}{8}\leqslant v\leqslant\dfrac{39}{4}$.

③当 $13\leqslant vt\leqslant 16$, $\dfrac{13}{v}\leqslant t\leqslant\dfrac{16}{v}$ 时，

$f(t) \quad (12-6t)^2+(16-vt)^2$ ，

因为 $12-6t>0, 16-vt>0$,所以当 $f(t)$ 在 $\left(\dfrac{13}{v},\dfrac{16}{v}\right)$ 递减，所以当 $t \quad \dfrac{13}{v}$ 时，$f(t)$ 取最大值，

$\left(12-6\times\dfrac{13}{v}\right)^2+\left(16-v\times\dfrac{13}{v}\right)^2\leqslant 25$,解得 $\dfrac{39}{8}\leqslant v\leqslant\dfrac{39}{4}$.

因为 $v>8$, 所以 $8<v\leqslant\dfrac{39}{4}$.

19.解：（1）由题意得：$a_1+2a_2+3a_3+\ldots+na_n=$（n-1）$S_n+2n$；（1 分）

当 n=1 时，则有：$a_1=$（1-1）S_1+2，解得：$a_1=2$；

当 n=2 时，则有：$a_1+2a_2=$（2-1）S_2+4，即 $2+2a_2=$（$2+a_2$）+4，解得：$a_2=4$；

∴$a_1=2$，$a_2=4$（2 分）

（2）由 $a_1+2a_2+3a_3+\ldots+na_n=$（n-1）$S_n+2n$①得：

$a_1+2a_2+3a_3+\ldots+na_n+$（n+1）$a_{n+1}=nS_{n+1}+2$（n+1）②（3 分）

②-①得：（n+1）$a_{n+1}=nS_{n+1}-$（n-1）S_n+2，

即：（n+1）（$S_{n+1}-S_n$）$=nS_{n+1}-$（n-1）S_n+2 即：$S_{n+1}=2S_n+2$；（5 分）

∴$S_{n+1}+2=2$（S_n+2），由 $S_1+2=a_1+2=4\neq0$ 知：

数列{S_n+2}是以 4 为首项，2 为公比的等比数列．（8 分）

（3）由（2）知：$S_n+2=4•2^{n-1}$，即 $S_n=4•2^{n-1}-2=2^{n+1}-2$（9 分）

当 n≥2 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=$（$2^{n+1}-2$）-（2^n-2）$=2^n$ 对 n=1 也成立，

即 $a_n=2^n$（$n\in N^*$）．（10 分）

∴数列{c_n}为 2^2，2^3，2^5，2^6，2^8，2^9，

它的奇数项组成以 4 为首项、公比为 8 的等比数列；偶数项组成以 8 为首项、公比为 8 的等比数列；（11 分）

∴当 n=2k-1（$k\in N^*$）时，$T_n=$（$c_1+c_3+\ldots+c_{2k-1}$）+（$c_2+c_4+\ldots+c_{2k-2}$）=（$2^2+2^5+\ldots+2^{3k-1}$）+（$2^3+2^6+\ldots+2^{3k-3}$）

$=\frac{4(1-8^k)}{1-8}+\frac{8(1-8^{k-1})}{1-8}=\frac{5}{7}8^k-\frac{12}{7}$，$T_{n+1}=T_n+c_{n+1}=\frac{5}{7}8^k-\frac{12}{7}+2^{3k}=\frac{12}{7}8^k-\frac{12}{7}$，

$\therefore\frac{T_{n+1}}{T_n}=\frac{128^k-12}{58^k-12}=\frac{12}{5}+\frac{84}{5(58^k-12)}$，$\because 58^k-12\geqslant 28amp;\therefore\frac{12}{5}<\frac{T_{n+1}}{T_n}\leqslant 3$（14 分）

∴当 n=2k（$k\in N^*$）时，$T_n=$（$c_1+c_3+\ldots+c_{2k-1}$）+（$c_2+c_4+\ldots+c_{2k}$）=（$2^2+2^5+\ldots+2^{3k-1}$）+（$2^3+2^6+\ldots+2^{3k}$）$=\frac{4(1-8^k)}{1-8}+\frac{8(1-8^k)}{1-8}=\frac{12}{7}8^k-\frac{12}{7}$，

$T_{n+1}=T_n+c_{n+1}=\frac{12}{7}8^k-\frac{12}{7}+2^{3k+2}=\frac{40}{7}8^k-\frac{12}{7}$,

$\therefore\frac{T_{n+1}}{T_n}=\frac{408^k-12}{128^k-12}=\frac{10}{3}+\frac{7}{3(8^k-1)}$， $\because 8^k-1\geqslant 7\therefore\frac{10}{3}<\frac{T_{n+1}}{T_n}\leqslant\frac{11}{3}\therefore\frac{12}{5}<\frac{T_{n+1}}{T_n}\leqslant\frac{11}{3}$.（16 分）

20.解：(1)当 $a=1$ 时, $f'(x)=1+\frac{1}{x}>0(x>0)$, $\therefore f(x)$ 的单调增区间为 $(0,+\infty)$.

(2) ①令 $h(x)=ax+lnx-\frac{x^2}{x-lnx}=0$, 分离参数得 $a=\frac{x}{x-lnx}-\frac{lnx}{x}$,

令 $h(x)=\frac{x}{x-lnx}-\frac{lnx}{x}$,

由 $h'(x)=\frac{1-lnx}{(x-lnx)^2}-\frac{1-lnx}{x^2}=\frac{lnx(1-lnx)(2x-lnx)}{x^2(x-lnx)^2}=0$,得 $x=1$ 或 $x=e$.

列表知,当 $x\in(0,1)$ 时, $h'(x)<0$;当 $x\in(1,e)$ 时, $h'(x)>0$;

当 $x\in(e,+\infty)$ 时, $h'(x)<0$.

即 $h(x)$ 在 $(0,1)$, $(e,+\infty)$ 上为减函数,在 $(1,e)$ 上为增函数.

而当 $x\to 0$, $h(x)\to+\infty$,当 $x\to+\infty$, $h(x)\to 1$,

又 $h(1)=1$, $h(e)=1+\frac{1}{e(e-1)}$;

结合函数的单调性可得,实数 a 的取值范围为 $(1,1+\frac{1}{e(e-1)})$.

② 由①可知, $0<x_1<1<x_2<e<x_3$,

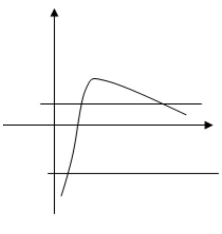
$a=\frac{x}{x-lnx}-\frac{lnx}{x}=\frac{1}{1-\frac{lnx}{x}}-\frac{lnx}{x}$,令 $\mu=\frac{lnx}{x}$,

则 $a=\frac{1}{1-\mu}-\mu$,即 $\mu^2+(a-1)\mu+1-a=0$,

$\mu_1+\mu_2=1-a<0$, $\mu_1\mu_2=1-a<0$,

对于 $\mu=\frac{lnx}{x}$, $\mu'=\frac{1-lnx}{x^2}$

则当 $0<x<e$ 时, $\mu'>0$;当 $x>e$ 时, $\mu'<0$.而当 $x>e$ 时, μ 恒大于 0.

画其简图,

不妨设 $\mu_1<\mu_2$,则 $\mu_1=\frac{lnx_1}{x_1}$, $\mu_2=\frac{lnx_2}{x_2}=\frac{lnx_3}{x_3}$,

$\therefore(1-\frac{lnx_1}{x_1})^2(1-\frac{lnx_2}{x_2})(1-\frac{lnx_3}{x_3})=(1-\mu_1)^2(1-\mu_2)(1-\mu_2)=[(1-\mu_1)(1-\mu_2)]^2$

$=[1-(\mu_1+\mu_2)+\mu_1\mu_2]^2=[1-(1-a)+(1-a)]^2=1$