江苏省仪征中学2020届高三上学期数学周末限时训练11（2019.11.30）

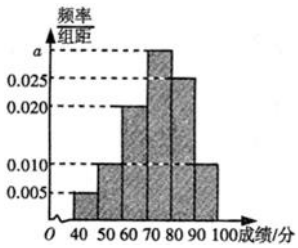
范围：江苏高考一卷全部内容(除立体几何外)

一、填空题（本大题共14小题，每小题5分，共70分，请将答案填写在答题卡相应的位置上）

1．设集合 $A=\{x\mid |x|\le 2\}$，$B=\{y\mid y=1-x^2\}$，则 $A\cap B=$___▲___.

2．统计某学校高三年级某班40名学生的数学期末考试成绩,分数均在40至100之间,得到的频率分布直方图如图所示.则图中 a 的值为___▲___.

```
S←0
I←1
While  I≤5
  I←I+1
  S←S+I
End  While
Print  S
```



3. 根据如图所示的伪代码,则输出 S 的值为___▲___.

4. 将一枚骰子抛掷两次,若先后出现的点数分别为 b,c,则方程 $x^2+bx+c=0$ 有实根的概率为___▲___.

5．已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $a_2+a_3+a_{10}=8$，则 $S_9=$___▲___.

6．已知 $f'(x)$ 是函数 $f(x)=\sin x-\cos x$ 的导函数，实数 α 满足 $f'(\alpha)=3f(\alpha)$，则 $\tan 2\alpha$ 的值为___▲___.

7. 已知 $\vec{a}=(1,\lambda)$，$\vec{b}=(2,1)$，若向量 $2\vec{a}+\vec{b}$ 与 $\vec{c}=(8,6)$ 共线，则实数 λ 的值为___▲___.

8．已知函数 $f(x)=(x-1)(px+q)$ 为偶函数，且在 $(0,+\infty)$ 单调递减，则 $f(x-3)<0$ 的解集为___▲___.

9．已知命题 p：$x^2-4x-5\le 0$,命题 q：$x^2-2x-m^2\le 0(m>0)$．若 p 是 q 的充分条件,则实数 m 的取值范围为___▲___.

10．已知 $\lambda\in\mathrm{R}$，函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-4x-5, x<\lambda\\ e^x-1, x\ge\lambda\end{cases}$，若函数 $f(x)$ 恰有2个零点，则实数 λ 的取值范围是___▲___.

11．在等腰梯形 $ABCD$ 中，$AB\,/\!/\,CD$，$AB=2$，$AD=1$，$\angle DAB=60^\circ$，若 $\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{CE}$，$\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{AB}$，且 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{DF}=-1$，则实数 λ 的值为___▲___.

12．已知不等边ΔABC（三条边都不相等的三角形）的内角A、B、C的对边分别为a、b、c，若$a\left(b\cos B-c\cos C\right)=\frac{1}{2}\left(b^2-c^2\right)$，则$\angle A$的弧度数为____▲____．

13．已知定义在 R 上的函数$f\left(x\right)=\dfrac{e^x}{e^x+\sqrt{e}}$，若存在实数$a$，使得对任意实数$x$都有$\left|f\left(x\right)-a\right|<k$成立，则实数$k$的最小值为____▲____．

14．若正实数x、y满足$x^2-xy+y^2=9$，且$\left|x^2-y^2\right|<9$，则xy的取值范围为____▲____．

二、解答题：本大题共 6 小题，共计 90 分．请在答题纸指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15．（本小题满分 14 分）

如图，单位圆$\odot O$与x轴正半轴交于点A，角α与β的终边分别与单位圆交于$B(x_B,y_B)$、$C(x_C,y_C)$两点，且满足$\beta-\alpha=\frac{\pi}{4}$，其中$\alpha$为锐角.

（1）当ΔAOB为正三角形时，求$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}$；

（2）当$x_C=-\frac{3}{5}$时，求$S_{\Delta AOB}$.

16.（本小题满分 14 分）

已知$\{a_n\}$是等差数列,$\{b_n\}$是等比数列,且$a_1=b_1=2$,$a_3+a_5=22$,$b_2b_4=b_6$.

(Ⅰ)数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式;

(Ⅱ)设$c_n=a_n-b_n$,求数列$\{c_n\}$前 n 项和.

17．（本小题满分 14 分）

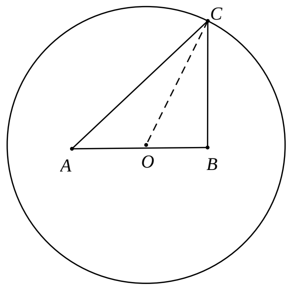
某公园准备在一圆形水池里设置两个观景喷泉，观景喷泉的示意图如图所示，A,B两点为喷泉，圆心O为AB的中点，其中$OA=OB=a$米，半径$OC=10$米，市民可位于水池边缘任意一点C处观赏．

（1）若当$\angle OBC=\dfrac{2\pi}{3}$时，$\sin\angle BCO=\dfrac{1}{3}$，求此时$a$的值；

（2）设$y=CA^2+CB^2$，且$CA^2+CB^2\leqslant 232$．

（i）试将y表示为a的函数，并求出a的取值范围；

（ii）若同时要求市民在水池边缘任意一点C处观赏喷泉时，观赏角度$\angle ACB$的最大值不小于$\dfrac{\pi}{6}$，试求A,B两处喷泉间距离的最小值．



第 17 题图

18．（本小题满分 16 分）

已知椭圆C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的离心率为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，椭圆$C$与$y$轴交于$A,B$两点，且$AB=2$．

（1）求椭圆C的方程；

（2）设点P是椭圆C上的一个动点，且点P在y轴的右侧，直线PA,PB与直线$x=4$交于M,N两点，若以MN为直径的圆与x轴交于E,F，求点P横坐标的取值范围及EF的最大值．

19. （本小题满分 16 分）

在数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1=a_2=1, a_n+a_{n+2}=\lambda+2a_{n+1}, n\in N^*$，$\lambda$ 为常数.

(1)证明: a_1, a_4, a_5 成等差数列;

(2)设 $c_n=2^{a_{n+2}-a_n}$，求数列$\{c_n\}$的前 n 项和 S_n；

(3)当$\lambda\neq 0$时,数列 $\{a_n-1\}$中是否存在不同的三项$a_{s+1}-1, a_{t+1}-1, a_{p+1}-1$成等比数列,且$s,t,p$也成等比数列?若存在，求出$s,t,p$的值；若不存在，说明理由.

20. （本小题满分 16 分）

已知函数 $f(x)=a\ln x-ax-3\ (a\in\mathbf{R})$.

（1）当$a>0$时，求函数 $f(x)$ 的单调区间;

（2）若函数 $y=f(x)$ 的图象在点 $(2, f(2))$ 处的切线的倾斜角为 $45°$，且函数 $g(x)=\frac{1}{2}x^2+nx+mf'(x)\ (m, n\in\mathbf{R})$ 当且仅当在 $x=1$ 处取得极值，其中 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数，求 m 的取值范围；

（3）若函数 $y=f(x)$ 在区间 $(\frac{1}{3},3)$ 内的图象上存在两点，使得在该两点处的切线相互垂直，求 a 的取值范围.

江苏省仪征中学2020届高三上学期数学周末限时训练11（2019.11.30）

高 三 数 学 答 案

1. $\{x|-2\le x\le 1\}$ 2、0.03 3、20 4、$\frac{19}{36}$ 5、24 6. $-\frac{4}{3}$ 7. 1

8. $(-\infty,2)\cup(4,+\infty)$ 9、$[\sqrt{15},+\infty)$ 10. $(-1,0]\cup(5,+\infty)$ 11. $\frac{1}{4}$

12. $\frac{2\pi}{3}$ 13. $\frac{1}{2}$ 14. $(6,9]$

15. （1）$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ （2）$\frac{7\sqrt{2}}{20}$

16. 解：(Ⅰ)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,等比数列$\{b_n\}$的公比为 q.

因为$a_3+a_5=2a_4=22$,所以$a_4=1=2+3d$.

解得$d=3$.

又因为$b_2b_4=b_1b_5=b_6=qb_5$,

所以$q=b_1=2$.

所以$a_n=3n-1$,$b_n=2^n$,$n\in N^*$.

(Ⅱ)由(Ⅰ)知,$a_n=3n-1$,$b_n=2^n$,$n\in N^*$.

因此$c_n=a_n-b_n=3n-1-2^n$

数列$\{a_n\}$前 n 项和为$\frac{n(2+3n-1)}{2}=\frac{3n^2+n}{2}$.

数列$\{b_n\}$的前 n 项和为$\frac{2(1-2^n)}{1-2}=2^{n+1}-2$.

所以,数列$\{c_n\}$的前 n 项和为$\frac{3n^2+n}{2}-2^{n+1}+2$,$n\in N^*$.

17.（1）在 ΔOBC 中，由正弦定理得，$\dfrac{OC}{\sin\angle OBC}=\dfrac{OB}{\sin\angle BCO}$，易得 $OB=a=\dfrac{20\sqrt{3}}{9}$.

（2）（i）易知 $AC^2=100+a^2-20a\cos\angle AOC$，$BC^2=100+a^2-20a\cos\angle BOC$，

故 $CA^2+CB^2=200+2a^2$，

又因为 $CA^2+CB^2\leqslant 232$，即 $200+2a^2\leqslant 232$，解得 $0<a\leqslant 4$，

即 $y=200+2a^2$，$a\in(0,4]$；

（ii）当观赏角度 $\angle ACB$ 的最大时，

$\cos\angle ACB$ 取得最小值，由余弦定理可得

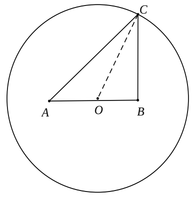
$$\cos\angle ACB=\frac{CA^2+CB^2-4a^2}{2CA\cdot CB}\geqslant\frac{CA^2+CB^2-4a^2}{CA^2+CB^2}=1-\frac{2a^2}{100+a^2}$$

$$\cos\angle ACB\geqslant 1-\frac{2a^2}{100+a^2}$$

由题意可知 $1-\dfrac{2a^2}{100+a^2}\leqslant\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

解此不等式得 $a\geqslant 20-10\sqrt{3}$，

经验证，$20-10\sqrt{3}\in(0,4]$，即 $2a\geqslant 40-20\sqrt{3}$.



第 17 题图

答：（1）此时 $a=\dfrac{20\sqrt{3}}{9}$；（2）（i）所得函数关系式为 $y=200+2a^2$，$a\in(0,4]$；

（ii）A,B 两处喷泉间距离的最小值为 $40-20\sqrt{3}$.

18.（1）由题意可得，$b=1$，$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

得 $\dfrac{a^2-1}{a^2}=\dfrac{3}{4}$，解 $a^2=4$，椭圆 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.

（2）设 $P(x_0,y_0)(0<x_0\leqslant 2)$，$A(0,1)$，$B(0,-1)$，

所以 $k_{PA}=\dfrac{y_0+1}{x_0}$，直线 PA 的方程为 $y=\dfrac{y_0+1}{x_0}x-1$，同理得直线 PB 的方程为

$y=\dfrac{y_0-1}{x_0}x+1$，直线 PA 与直线 $x=4$ 的交点为 $M(4,\dfrac{4(y_0-1)}{x_0}+1)$，

直线 PB 与直线 $x=4$ 的交点为 $N(4,\dfrac{4(y_0+1)}{x_0}-1)$，线段 MN 的中点 $(4,\dfrac{4y_0}{x_0})$，…10 分

所以圆的方程为 $(x-4)^2+(y-\dfrac{4y_0}{x_0})^2=(1-\dfrac{4}{x_0})^2$，令 $y=0$，

则 $(x-4)^2+\dfrac{16y_0^2}{x_0^2}=(1-\dfrac{4}{x_0})^2$，因为 $\dfrac{x_0^2}{4}+y_0^2=1$，所以 $\dfrac{y_0^2-1}{x_0^2}=-\dfrac{1}{4}$，

所以 $(x-4)^2+\dfrac{8}{x_0}-5=0$，

因为这个圆与 x 轴相交, 该方程有两个不同的实数解，所以 $5-\frac{8}{x_0}>0$，解得 $x_0\in(\frac{8}{5},2]$.

设交点坐标 $(x_1,0),(x_2,0)$，则 $|x_1-x_2|=2\sqrt{5-\frac{8}{x_0}}$（$\frac{8}{5}<x_0\leqslant 2$），

所以该圆被 x 轴截得的弦长为最大值为 2.

19.解（1）因为 $a_n+a_{n+2}=\lambda+2a_{n+1}$，$a_1=a_2=1$，

所以 $a_3=2a_2-a_1+\lambda=\lambda+1$，

同理，$a_4=2a_3-a_2+\lambda=3\lambda+1$，$a_5=2a_4-a_3+\lambda=6\lambda+1$，又因为 $a_4-a_1=3\lambda$，

$a_5-a_4=3\lambda$，所以 $a_4-a_1=a_5-a_4$，故 a_1，a_4，a_5 成等差数列.

（2） 由 $a_n+a_{n+2}=\lambda+2a_{n+1}$，得 $a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n+\lambda$，

令 $b_n=a_{n+1}-a_n$，则 $b_{n+1}-b_n=\lambda$，$b_1=a_2-a_1=0$，

所以 $\{b_n\}$ 是以 0 为首项，公差为 λ 的等差数列，

所以 $b_n=b_1+(n-1)\lambda=(n-1)\lambda$ 即 $a_{n+1}-a_n=(n-1)\lambda$，

所以 $a_{n+2}-a_n=2(a_{n+1}-a_n)+\lambda=(2n-1)\lambda$，

所以 $c_n=2^{a_{n+2}-a_n}=2^{(2n-1)\lambda}$.　$S_n=c_1+c_2+\cdots+c_n=2^{\lambda}+2^{3\lambda}+2^{5\lambda}+\cdots+2^{(2n-1)\lambda}$

当 $\lambda=0$ 时，$S_n=n$，

当 $\lambda\neq 0$ 时，$S_n=2^{\lambda}+2^{3\lambda}+2^{5\lambda}+\cdots+2^{(2n-1)\lambda}=\dfrac{2^{\lambda}(1-2^{2n\lambda})}{1-2^{2\lambda}}$.

（3）由（2）知 $a_{n+1}-a_n=(n-1)\lambda$，

用累加法可求得 $a_n=1+\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}\lambda\left(n\geqslant 2\right)$，

当 $n=1$ 时也适合，所以 $a_n=1+\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}\lambda\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$ 假设存在三项 $a_{s+1}-1$，$a_{t+1}-1$，$a_{p+1}-1$ 成等比数列，且 s,t,p 也成等比数列，

则 $(a_{t+1}-1)^2=(a_{s+1}-1)(a_{p+1}-1)$，即 $\dfrac{t^2(t-1)^2}{4}=\dfrac{s(s-1)p(p-1)}{4}$，

因为 s,t,p 成等比数列，所以 $t^2=sp$，

所以 $(t-1)^2=(s-1)(p-1)$，

化简得 $s+p=2t$，联立 $t^2=sp$，得 $s=t=p$. 这与题设矛盾.

故不存在三项 $a_{s+1}-1,a_{t+1}-1,a_{p+1}-1$ 成等比数列，且 s,t,p 也成等比数列.

20 解：（1） $f'(x)=\dfrac{a(1-x)}{x}(x>0)$， 当 $a>0$ 时，令 $f'(x)>0$ 得 $0<x<1$，

令 $f'(x)<0$ 得 $x>1$，

故函数 $f(x)$ 的单调增区间为 $(0,1)$，单调减区间为 $(1,+\infty)$；

（2）函数 $y=f(x)$ 的图象在点 $(2,f(2))$ 处的切线的倾斜角为 $45°$，则 $f'(2)=1$，即 $a=-2$；

所以 $g(x)=\dfrac{1}{2}x^2+nx+m(2-\dfrac{2}{x})$，所以 $g'(x)=x+n+\dfrac{2m}{x^2}=\dfrac{x^3+nx^2+2m}{x^2}$，

因为 $g(x)$ 在 $x=1$ 处有极值，故 $g'(1)=0$，从而可得 $n=-1-2m$，则

$g'(x)=\dfrac{x^3+nx^2+2m}{x^2}=\dfrac{(x-1)(x^2-2mx-2m)}{x^2}$，

又因为 $g(x)$ 仅在 $x=1$ 处有极值，

所以 $x^2-2mx-2m\geqslant 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

当 $m>0$ 时，由 $-2m<0$，即 $\exists x_0\in(0,+\infty)$，

使得 ${x_0}^2-2mx_0-2m<0$，所以 $m>0$ 不成立，故 $m\leqslant 0$，

又 $m\leqslant 0$ 且 $x\in(0,+\infty)$ 时，$x^2-2mx-2m\geqslant 0$ 恒成立，所以 $m\leqslant 0$；

（3）由 $f'(x)=\dfrac{a(1-x)}{x}(x>0)$ 得 $(0,1)$ 与 $(1,+\infty)$ 分别为 $f(x)$ 的两个不同的单调区间，

因为 $f(x)$ 在两点处的切线相互垂直，所以这两个切点一定分别在两个不同单调区间内.

故可设存在的两点分别为 $(x_1,f(x_1))$，$(x_2,f(x_2))$，其中 $\dfrac{1}{3}<x_1<1<x_2<3$，

由该两点处的切线相互垂直，得 $\dfrac{a(1-x_1)}{x_1}\cdot\dfrac{a(1-x_2)}{x_2}=-1$，

即 $\dfrac{1-x_1}{x_1}=-\dfrac{1}{a^2}\cdot\dfrac{x_2}{1-x_2}$，而 $\dfrac{1-x_1}{x_1}\in(0,2)$，

故 $-\dfrac{1}{a^2}\cdot\dfrac{x_2}{1-x_2}\in(0,2)$，可得 $(2a^2-1)x_2>2a^2$，

由 $x_2>0$ 得 $2a^2-1>0$，则 $x_2>\dfrac{2a^2}{2a^2-1}$，又 $1<x_2<3$，则 $\dfrac{2a^2}{2a^2-1}<3$，即 $a^2>\dfrac{3}{4}$，

所以 a 的取值范围为 $(-\infty,-\dfrac{\sqrt{3}}{2})\cup(\dfrac{\sqrt{3}}{2},+\infty)$.