极值点偏移问题中令人困惑的南辕北辙现象的思考

俞杏明
江苏省兴化中学 225700

[摘 要] 极值点偏移问题证法很多,可有时会出现各种证法证出的结论与题意要求的结论的不等号方向始终相反. 文章从极限拟合函数图像的角度出发,揭示"南辕北辙"的缘由,给出一般性的正确的推导证明流程.

[关键词] 极值点偏移;基函数;极限拟合;一致性

极值点偏移问题中有时会出现,推导出的不等式与题意要求的不等式方向相反. 这种南辕北辙现象是怎么产生的?如何避免这种情况的发生?

问题呈现

例1:(2017年合肥市高三第二次模拟试题)已知实数$m>1$,$f(x)=\ln(x+m)-mx$有两个零点x_1,x_2,求证:$x_1+x_2<0$.

证法1:在$f(x)=\ln(x+m)-mx$中,令$f'(x)=\frac{1}{x+m}-m=0$,则$x=\frac{1}{m}-m$.

当$x\in\left(-m,\frac{1}{m}-m\right)$时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增;当$x\in\left(\frac{1}{m}-m,+\infty\right)$时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减.

令$F(x)=f\left(\frac{1}{m}-m+x\right)-f\left(\frac{1}{m}-m-x\right)=\ln\left(\frac{1}{m}+x\right)-\ln\left(\frac{1}{m}-x\right)-2mx$,

则$F'(x)=\frac{1}{\frac{1}{m}+x}+\frac{1}{\frac{1}{m}-x}-2m=\frac{2m^3x^2}{1-m^2x^2}$.

由$\begin{cases}\frac{1}{m}-m+x>-m,\\ \frac{1}{m}-m-x>-m,\end{cases}$得$-\frac{1}{m}<x<\frac{1}{m}$,所以$F'(x)\geqslant0$在$x\in\left(-\frac{1}{m},\frac{1}{m}\right)$上恒成立,

所以$F(x)$在$x\in\left(-\frac{1}{m},\frac{1}{m}\right)$上单调递增.

又$F(0)=0$,所以$x\in\left(-\frac{1}{m},0\right)$时$F(x)<0$,

所以$x\in\left(-\frac{1}{m},0\right)$时,$f\left(\frac{1}{m}-m+x\right)<f\left(\frac{1}{m}-m-x\right)$.

不妨设$x_1<x_2$,则$x_1\in\left(-m,\frac{1}{m}-m\right)$,$x_2\in\left(\frac{1}{m}-m,+\infty\right)$,

所以$-\frac{1}{m}<x_1-\left(\frac{1}{m}-m\right)<0$,所以$f(x_2)=f(x_1)=f\left[\frac{1}{m}-m+x_1-\left(\frac{1}{m}-m\right)\right]<f\left\{\frac{1}{m}-m-\left[x_1-\left(\frac{1}{m}-m\right)\right]\right\}=f\left(\frac{2}{m}-2m-x_1\right)$,

即$f(x_2)<f\left(\frac{2}{m}-2m-x_1\right)$.

因为$x_1\in\left(-m,\frac{1}{m}-m\right)$,所以$\frac{2}{m}-2m-x_1>\frac{1}{m}-m$. 又因为$x_2>\frac{1}{m}-m$,且$x\in\left(\frac{1}{m}-m,+\infty\right)$时,$f(x)$单调递减,所以$x_2>\frac{2}{m}-2m-x_1$,所以$x_1+x_2>\frac{2}{m}-2m$.

这与题意要证明的结论"$x_1+x_2<0$"比较,不等号方向相反. 这是怎么回事?

试试其他解法,看看情形如何?

证法2:由题意得$\begin{cases}\ln(x_1+m)-mx_1=0,\\ \ln(x_2+m)-mx_2=0.\end{cases}$

令$x_1+m=t_1$,$x_2+m=t_2$,则$x_1=t_1-m$,$x_2=$

作者简介:俞杏明(1975-),中学高级教师,大市学科带头人,市级专家组成员,主要从事解题研究、竞赛辅导、教材教法研究等工作.

万方数据

t_2-m.

所以 $\begin{cases}\ln t_1-m(t_1-m)=0,\\ \ln t_2-m(t_2-m)=0,\end{cases}$

两式相减得 $\ln t_1-\ln t_2=m(t_1-t_2)$，所以 $m=\frac{\ln t_1-\ln t_2}{t_1-t_2}$.

要证 $x_1+x_2<0$，只要证 $\frac{x_1+x_2}{2}<\frac{1}{m}-m$，只要证 $x_1+x_2<\frac{2}{m}-2m$，

只要证 $t_1+t_2-2m<\frac{2}{m}-2m$，只要证 $t_1+t_2<\frac{2}{m}$，只要证 $t_1+t_2<\frac{2(t_1-t_2)}{\ln t_1-\ln t_2}$，

不妨设 $t_2>t_1>0$，故只要证 $\ln\frac{t_2}{t_1}-\frac{2\left(\frac{t_2}{t_1}-1\right)}{\frac{t_2}{t_1}+1}<0$，

令 $\frac{t_2}{t_1}=u$，则只要证 $\ln u-\frac{2(u-1)}{u+1}<0$ $(u>1)$.

令 $\varphi(u)=\ln u-\frac{2(u-1)}{u+1}$ $(u>1)$，则 $\varphi'(u)=\frac{(u-1)^2}{u(u+1)^2}>0(u>1)$，所以 $y=\varphi(u)$ 在 $u\in(1,+\infty)$ 上单调递增.

又 $\varphi(1)=0$，所以 $\varphi(u)>0$，即 $\ln u-\frac{2(u-1)}{u+1}>0$，与 $\ln u-\frac{2(u-1)}{u+1}<0$ 矛盾.

两种证法均没有证出所需的结论. 难道例1是错题？还是两种证法都有问题？

查找症结

注意到 $F'(x)=f'\left(\frac{1}{m}-m+x\right)+f'\left(\frac{1}{m}-m-x\right)>0$ 对 $x\in\left(-\frac{1}{m},0\right)\cup\left(0,\frac{1}{m}\right)$ 恒成立. 这表明在 $f(x)$ 图像上与极值点所在直线 $x=\frac{1}{m}-m$ 距离相等的任意两个点处，切线斜率之和始终为正数，结合 $f(x)$ 的单调性，所以 $f(x)$ 的极值点左偏（图1）.

因此应该有 $x_1+x_2>\frac{2}{m}-2m$.

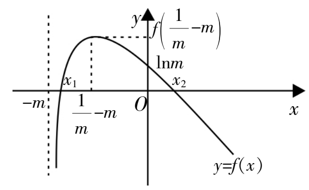

图1

由此我们发现，两种证法的问题出在基函数选取不当. 推导证明的过程应基于与 x_1,x_2 共零点且极值点右偏的函数.

极限拟合

那么，有没有与 x_1,x_2 共零点且极值点右偏的函数？

在 $f(x)=\ln(x+m)-mx(m>1)$ 中，当 $x\to-m$ 且 $x>-m$ 时，$f(x)$ 的图像非常陡峭，而在极值点所在直线 $x=\frac{1}{m}-m$ 另一侧对应点附近，$f(x)$ 的图像较平缓，因此拟合出的函数 $f(x)$ 图像呈现函数的极值点左偏态势.

要寻求与 x_1,x_2 共零点且极值点右偏的函数，则应令 $f(x)=\ln(x+m)-mx=0$，然后设法消除 $\ln(x+m)-mx=0$ 中 $\ln(x+m)$ 的影响，使转化出的函数的图像呈现极值点左侧平缓，右侧陡峭的态势. 注意到指数型函数 $y=e^{mx}(m>1)$ 在 $x\to+\infty$ 时图像非常陡峭，在 $x\to-\infty$ 时图像比较平缓，因此应把 $\ln(x+m)-mx=0$ 往 $\ln(x+m)=mx$，$x+m=e^{mx}$，即 $e^{mx}-x-m=0$ 方向上转化.

再上征途

现在基于函数 $g(x)=e^{mx}-x-m(x>-m)$ 证明 $x_1+x_2<0$.

证法3：在 $g(x)=e^{mx}-x-m(x>-m)$ 中，令 $g'(x)=me^{mx}-1=0$，则 $x=\frac{1}{m}\ln\frac{1}{m}$.

当 $x\in\left(-m,\frac{1}{m}\ln\frac{1}{m}\right)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；当 $x\in\left(\frac{1}{m}\ln\frac{1}{m},+\infty\right)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增（图2）.

不妨设 $x_1<x_2$，则 $x_1\in\left(-m,\frac{1}{m}\ln\frac{1}{m}\right)$，$x_2\in\left(\frac{1}{m}\ln\frac{1}{m},+\infty\right)$.

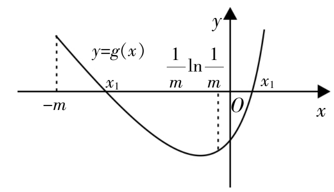

图2

令 $G(x)=g\left(\frac{1}{m}\ln\frac{1}{m}+x\right)-g\left(\frac{1}{m}\ln\frac{1}{m}-x\right)=\frac{1}{m}e^{mx}-\frac{1}{m}e^{-mx}-2x$.

则 $G'(x)=e^{mx}+e^{-mx}-2\geqslant2\sqrt{e^{mx}\times e^{-mx}}-2=0$，当且仅当 $x=0$ 时取“=”.

由 $\begin{cases}\frac{1}{m}\ln\frac{1}{m}+x>-m,\\ \frac{1}{m}\ln\frac{1}{m}-x>-m,\end{cases}$ 得 $-m-\frac{1}{m}\ln\frac{1}{m}<x<m+\frac{1}{m}\ln\frac{1}{m}$.

所以 $G'(x)\geqslant0$ 在 $x\in\left(-m-\frac{1}{m}\ln\frac{1}{m},m+\frac{1}{m}\ln\frac{1}{m}\right)$ 上恒成立，所以 $G(x)$ 在 $x\in\left(-m-\frac{1}{m}\ln\frac{1}{m},m+\frac{1}{m}\ln\frac{1}{m}\right)$ 上单调递增. 又 $G(0)=0$，所以 $x\in\left(-m-\frac{1}{m}\ln\frac{1}{m},0\right)$ 时，$G(x)<0$，即 $x\in\left(-m-\frac{1}{m}\ln\frac{1}{m},0\right)$ 时，$g\left(\frac{1}{m}\ln\frac{1}{m}+x\right)<g\left(\frac{1}{m}\ln\frac{1}{m}-x\right)$.

因为 $x_1\in\left(-m,\frac{1}{m}\ln\frac{1}{m}\right)$，所以 $-m-\frac{1}{m}\ln\frac{1}{m}<x_1-\frac{1}{m}\ln\frac{1}{m}<0$，

所以 $g(x_2)=g(x_1)=g\left[\frac{1}{m}\ln\frac{1}{m}+\left(x_1-\frac{1}{m}\ln\frac{1}{m}\right)\right]<g\left[\frac{1}{m}\ln\frac{1}{m}-\left(x_1-\frac{1}{m}\ln\frac{1}{m}\right)\right]=g\left(\frac{2}{m}\ln\frac{1}{m}-x_1\right)$，即 $g(x_2)<g\left(\frac{2}{m}\ln\frac{1}{m}-x_1\right)$.

因为 $x_1\in\left(-m,\frac{1}{m}\ln\frac{1}{m}\right)$，所以 $\frac{2}{m}\ln\frac{1}{m}-x_1>\frac{1}{m}\ln\frac{1}{m}$. 又因为 $x_2>\frac{1}{m}\ln\frac{1}{m}$，且 $x\in\left(\frac{1}{m}\ln\frac{1}{m},+\infty\right)$ 时，$g(x)$ 单调递增，所以 $x_2<\frac{2}{m}\ln\frac{1}{m}-x_1$，即 $x_1+x_2<\frac{2}{m}\ln\frac{1}{m}<0$.

（下转第82页）

万方数据

$2\sqrt{3}$，所以$\angle ACB=30°$，$AC=4$.

$\triangle PAC$中，$PA\perp PC$，$PA=PC$，$AC=4$，所以$PM=2$，$PC=2\sqrt{2}$.

底面四边形$ABDC$中，$DM^2=DC^2+CM^2-2DC\cdot CM\cdot\cos120°$，得到$DM=2\sqrt{3}$. Rt$\triangle PMD$中，$PD=4$.

$\triangle PCD$中，$\cos\angle PCD=\frac{PC^2+CD^2-PD^2}{2PC\cdot CD}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$.

所以异面直线PC与AB所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{2}}{4}$.

此题也可以用空间向量法解答，用补形能更好地体现线面关系.

三、把四面体补形成三棱柱

例6：已知某几何体底面ABC是棱长为1的等边三角形，$PA\perp$平面ABC，$PA=3$，求该几何体的外接球的半径.

解答：将该四面体补形成一个三棱柱

如图8：

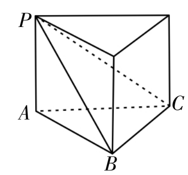

图8

四面体的外接球就是三棱柱的外接球.

先求三棱柱底面三角形外接圆半径$r=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

又因为$PA\perp$平面ABC，$PA=3$，

所以三棱柱的外接球半径为$R=\sqrt{r^2+\left(\frac{PA}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{93}}{6}$.

四面体的问题可以通过补形变成正方体、长方体乃至平行六面体的问题. 尤其在正方体和长方体中，点线面的关系是我们所熟悉的. 一些几何题的证明和求解，由原几何图形分析探究会比较烦琐，通过补形填补成一个新的几何图形，能使原问题的本质得到充分的体现，解决起来比较容易. 本文着重讨论四面体的补形问题，希望窥一斑而知全豹，探究立体几何中补形法这一重要的转化策略.

（上接第71页）

证法4：由题意得$\begin{cases}e^{mx_1}-x_1-m=0,\\ e^{mx_2}-x_2-m=0,\end{cases}$所以$\begin{cases}\ln(x_1+m)-mx_1=0,\\ \ln(x_2+m)-mx_2=0.\end{cases}$

令$x_1+m=t_1$，$x_2+m=t_2$，则$x_1=t_1-m$，$x_2=t_2-m$，

所以$\begin{cases}\ln t_1-m(t_1-m)=0,\\ \ln t_2-m(t_2-m)=0,\end{cases}$两式相减得$\ln t_1-\ln t_2=m(t_1-t_2)$，所以$m=\frac{\ln t_1-\ln t_2}{t_1-t_2}$，

所以$\begin{cases}\ln t_1-\frac{\ln t_1-\ln t_2}{t_1-t_2}\times t_1+\left(\frac{\ln t_1-\ln t_2}{t_1-t_2}\right)^2=0,\\ \ln t_2-\frac{\ln t_1-\ln t_2}{t_1-t_2}\times t_2+\left(\frac{\ln t_1-\ln t_2}{t_1-t_2}\right)^2=0.\end{cases}$

两式相加得$\ln t_1+\ln t_2-\frac{\ln t_1-\ln t_2}{t_1-t_2}\times(t_1+t_2)+2\left(\frac{\ln t_1-\ln t_2}{t_1-t_2}\right)^2=0$，

所以$\frac{\ln t_1-\ln t_2}{t_1-t_2}\times(t_1+t_2)=\ln t_1+\ln t_2+2\left(\frac{\ln t_1-\ln t_2}{t_1-t_2}\right)^2$，

所以$t_1+t_2-2\times\frac{\ln t_1-\ln t_2}{t_1-t_2}=\frac{\ln t_1+\ln t_2}{\ln t_1-\ln t_2}(t_1-t_2)$.

要证$x_1+x_2<0$，只要证$x_1+x_2<\frac{2}{m}\ln\frac{1}{m}$，

只要证$t_1+t_2-2m<\frac{2}{m}\ln\frac{1}{m}$，

又$m=\frac{\ln t_1-\ln t_2}{t_1-t_2}$，$t_1+t_2-2\times\frac{\ln t_1-\ln t_2}{t_1-t_2}=\frac{\ln t_1+\ln t_2}{\ln t_1-\ln t_2}(t_1-t_2)$，

因此只要证$\frac{\ln t_1+\ln t_2}{\ln t_1-\ln t_2}(t_1-t_2)<\frac{2(t_1-t_2)}{\ln t_1-\ln t_2}\ln\frac{t_1-t_2}{\ln t_1-\ln t_2}$，

只要证$\ln t_1+\ln t_2<2\ln\frac{t_1-t_2}{\ln t_1-\ln t_2}$，

只要证$\sqrt{t_1t_2}<\frac{t_1-t_2}{\ln t_1-\ln t_2}$（对数平均不等式）.

不妨设$t_2>t_1>0$，则只要证$\ln\frac{t_2}{t_1}<\sqrt{\frac{t_2}{t_1}}-\sqrt{\frac{t_1}{t_2}}$.

令$u=\sqrt{\frac{t_2}{t_1}}>1$，则只要证$u-2\ln u-\frac{1}{u}>0$.

令$\varphi(u)=u-2\ln u-\frac{1}{u}$，则$\varphi'(u)=1-\frac{2}{u}+\frac{1}{u^2}=\frac{(u-1)^2}{u^2}>0$，所以$\varphi(u)$在$u\in(1,+\infty)$上单调递增，所以$\varphi(u)>\varphi(1)=0$，所以$u-2\ln u-\frac{1}{u}>0$，所以$x_1+x_2<0$，所以此题得证.

形成结论

极值点偏移问题中的南辕北辙现象，是由基函数极值点偏移方向不符题意要求引起的. 要避免这种现象的发生，应使基函数极值点偏移方向与题意要求一致.

万方数据