江苏省仪征中学 2019 届高三上学期数学周末限时训练 5（2018.10.13）

范围：集合与逻辑、函数与导数、三角函数、平面向量、复数、解析几何、不等式

一、填空题：本大题共 14 小题，每小题 5 分，共 70 分.

1、已知集合 A={0,1,2}，集合 B={−1,1}，则 A∩B=_______.

2、命题“若 $x^2-x\geq 0$，则 $x>2$”的否命题是___________________.

3、设复数 z 满足: $z(2-i)=4+3i$（其中 i 为虚数单位），则 z 的模等于______.

4、若命题“$\exists t\in R$，$t^2-2t-a<0$”是假命题，则实数 a 的取值范围是_____________.

5、若 $\sin(\alpha-\pi)=2\cos(2\pi-\alpha)$，则 $\dfrac{\sin(\pi-\alpha)+5\cos(2\pi-\alpha)}{3\cos(\pi-\alpha)-\sin(-\alpha)}$ 的值为__________.

6、设椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左，右焦点分别为 F_1，F_2，P 是 C 上的点，$PF_2\perp F_1F_2$，$\angle PF_1F_2=30°$，则 C 的离心率为________ .

7、已知实数 x,y 满足方程 $y=\sqrt{-x^2+4x-1}$，则 $\dfrac{y}{x}$ 的取值范围是_________ .

8、已知 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数，且对任意 $x\in$ R 恒有 $f(x+2)=f(x)$，当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=2^x$，则 $f(\log_2 12)$ 的值为____________.

9、已知经过点 $M(2,1)$ 作圆 C：$(x+1)^2+y^2=1$ 的两条切线，切点分别为 A，B 两点，则直线 AB 的方程为___________________.

10、已知函数 $f(x)=2\sin\dfrac{x}{2}\cos(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4})$. 则 $f(x)$ 在区间 $[-\pi,0]$ 上的最小值为___________.

11、在 ΔABC 中，点 P 是边 AB 的中点，已知 $|\overrightarrow{CP}|=\sqrt{3}$，$|\overrightarrow{CA}|=4$，$\angle ACB=\dfrac{2\pi}{3}$，则 $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CA}=$_____.

12、已知 $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\leq 0\\ |\ln x|, & x>0\end{cases}$，则方程 $f[f(x)]=3$ 的根的个数是_______.

13、已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>c>0,a^2=b^2+c^2)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，若以$F_2$为圆心，$b-c$为半径作圆$F_2$，过椭圆上一点 P 作此圆的切线，切点为 T，且$|PT|$的最小值不小于$\frac{\sqrt{3}}{2}(a-c)$．则椭圆的离心率 e 的取值范围为__▲__.

14、若不等式$\left|mx^3-\ln x\right|\geq 1$对 $\forall x\in\left(0,1\right]$恒成立, 则实数 m 的取值范围是____________.

二、解答题：本大题共 6 小题，共 90 分. 解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

15、(本小题满分 14 分) 设△ABC面积的大小为S，且$3\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2S$.

（1）求$\sin A$的值；

（2）若$C=\frac{\pi}{4}$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=16$，求$AC$.

16、(本小题满分 14 分) 已知椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$经过点$(\sqrt{3},\frac{1}{2})$，$(1,\frac{\sqrt{3}}{2})$，点$A$是椭圆的下顶点.

（1）求椭圆C的标准方程；

（2）过点A且互相垂直的两直线l_1，l_2与直线$y=x$分别相交于E，F两点，已知$OE=OF$，求直线l_1的斜率.

17、（本小题满分 14 分）已知函数 $f(x)=ax^2-2ax+2+b(a\neq 0)$，在区间$\left[2,3\right]$上有最大值 5 最小值 2.

（1）求 a，b 的值；

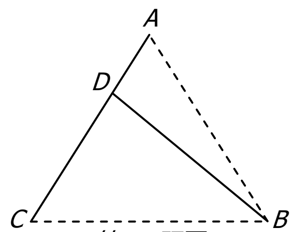
（2）若 $b<1, g(x)=f(x)-(2^m)\cdot x$ 在$\left[2,4\right]$上单调，求 m 的取值范围；

（3）若 $a>0$， $f\left(x\right)=-x^2+2x+2c-c^2$ 有两个不同零点 $x_{1,}$ x_2 求$\left|x_1-x_2\right|$的范围.

18、(本小题满分 16 分) 某企业有两个生产车间分别在 A、 B 两个位置， A 车间有 100 名员工， B 车间有 400 名员工。现要在公路 AC 上找一点 D,修一条公路 BD，并在 D 处建一个食堂，使得所有员工均在此食堂用餐。已知 A、 B、 C 中任意两点间的距离均有 $1km$，设 $\angle BDC=\alpha$，所有员工从车间到食堂步行的总路程为 s.

（1）写出 s 关于 α 的函数表达式，并指出 α 的取值范围；

（2）问食堂 D 建在距离 A 多远时，可使总路程 s 最少?



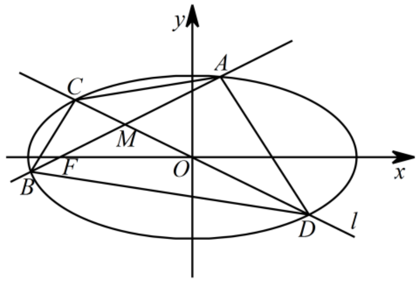
第 18 题图

19、(本小题满分 16 分) 如图，已知椭圆 E: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，过左焦点 $F(-\sqrt{3},0)$ 且斜率为 k 的直线交椭圆 E 于 A、B 两点，线段 AB 的中点为 M，直线 l: $x+4ky=0$ 交椭圆 E 于 C， D 两点.

（1）求椭圆 E 的方程;

（2）求证：点 M 在直线 l 上;

（3）是否存在实数 k，使得△ BDM 的面积是△ACM 的 3 倍?若存在，求出 k 的值；若不存在，说明理由.



20、(本小题满分 16 分) 已知函数 $f(x)=\dfrac{2x}{\ln x}$.

（1）求函数 $y=f(x)$ 在区间 $\left(e,e^2\right]$ 上的值域;

（2）求 $f(x)$ 的单调递减区间;

（3）若存在 $x_0\in[\mathrm{e},+\infty)$，使函数 $g(x)=a\mathrm{e}\ln x+\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{a+\mathrm{e}}{2}\cdot\ln x\cdot f(x)\leqslant a$ 成立，求实数的取值范围.

江苏省仪征中学 2018 届高三上学期数学周末限时训练 5 答案

1、$\{1\}$； 2、若 $x^2-x<0$，则 $x\le 2$ ； 3、$\sqrt{5}$ ； 4、$(-\infty,-1]$；5、-1； 6、$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$；

7、$\left[0,\sqrt{3}\right]$； 8、$\dfrac{4}{3}$； 9、$3x+y+2=0$； 10、$-1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$； 11、6； 12、5；

13、$\frac{3}{5}\le e<\frac{\sqrt{2}}{2}$； 14、$\left[\dfrac{e^2}{3},+\infty\right)$.

15、解：（1）设 ΔABC 的三边长分别为 a,b,c，由 $3\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2S$，

得 $3bc\cos A=2\times\dfrac{1}{2}bc\sin A$，得 $\sin A=3\cos A$. …………2 分

即 $\sin^2 A=9\cos^2 A=9(1-\sin^2)$，所以 $\sin^2 A=\dfrac{9}{10}$. …………4 分

又 $A\in(0,\pi)$，所以 $\sin A>0$，故 $\sin A=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$. …………6 分

（2）由 $\sin A=3\cos A$ 和 $\sin A=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$，得 $\cos A=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，

又 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=16$，所以 $bc\cos A=16$，得 $bc=16\sqrt{10}$ ①. …………8 分

又 $C=\dfrac{\pi}{4}$，所以 $\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C$

$=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{10}}{10}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. ………10 分

在△ ABC 中，由正弦定理，

得 $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$，即 $\dfrac{b}{\frac{2\sqrt{5}}{5}}=\dfrac{c}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$，得 $c=\dfrac{\sqrt{10}}{4}b$ ②. …12 分

联立①②，解得 $b=8$，即 $AC=8$. …………14 分

16、解：（1）由题意得 $\begin{cases}\dfrac{3}{a^2}+\dfrac{1}{4b^2}=1\\ \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{3}{4b^2}=1\end{cases}$，解得 $\begin{cases}\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{1}{4}\\ \dfrac{1}{b^2}=1\end{cases}$，所以椭圆 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$；

（2）由题意知 $A(0,-1)$，直线 l_1，l_2 的斜率存在且不为零，

设直线 l_1： $y=k_1x-1$，与直线 $y=x$ 联立方程有 $\begin{cases}y=k_1x-1\\ y=x\end{cases}$，得 $E(\dfrac{1}{k_1-1},\dfrac{1}{k_1-1})$，

设直线 l_2： $y=-\dfrac{1}{k_1}x-1$，同理 $F(\dfrac{1}{-\frac{1}{k_1}-1},\dfrac{1}{-\frac{1}{k_1}-1})$，

因为 $OE=OF$，所以 $|\dfrac{1}{k_1-1}|=|\dfrac{1}{-\frac{1}{k_1}-1}|$， ① $\dfrac{1}{k_1-1}=\dfrac{1}{-\dfrac{1}{k_1}-1}$，$k_1+\dfrac{1}{k_1}=0$无实数解；

② $\dfrac{1}{k_1-1}=\dfrac{1}{-\dfrac{1}{k_1}-1}$，$k_1-\dfrac{1}{k_1}=2$，$k_1^{\,2}-2k_1-1=0$，解得$k_1=1\pm\sqrt{2}$，

综上可得，直线l_1的斜率为$1\pm\sqrt{2}$.

17、解：（1）$f(x)=a(x-1)^2+2+b-a$ ，

①当$a>0$时，$f(x)$在$[2,\ 3]$上为增函数，

故$\begin{cases}f(3)=2\\f(2)=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}9a-6a+2+b=5\\4a-4a+2+b=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=0\end{cases}$，

②当$a<0$时，$f(x)$在$[2,\ 3]$上为减函数，

故$\begin{cases}f(3)=2\\f(2)=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}9a-6a+2+b=2\\4a-4a+2+b=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-1\\b=3\end{cases}$，

所以$\begin{cases}a=1\\b=0\end{cases}$ 或$\begin{cases}a=-1\\b=3\end{cases}$；

（2）$\because b<1$ ，$\therefore a=1\ \ b=0$，即 $f(x)=x^2-2x+2$，

$\therefore g(x)=x^2-2x+2-(2^m)x=x^2-(2+2^m)x+2$，

$\therefore \dfrac{2+2^m}{2}\le 2$ 或 $\dfrac{2^m+2}{2}\ge 4$，即$2^m\le 2$或 $2^m\ge 6$ ， 即$m\le 1$ 或 $m\ge \log_2{}^6$；

（3）$\because a>0\ \therefore a=1,b=0$，$\therefore f\left(x\right)=x^2-2x+2$，

$\therefore x^2-2x+2=-x^2+2x+2c-c^2$ ，即$2x^2-4x+2-2c+c^2=0$，$c\in\left(0,2\right)$.

$\therefore\left|x_1-x_2\right|=\sqrt{\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2}=\sqrt{4-4\cdot\dfrac{2-2c+c^2}{2}}=\sqrt{4c-2c^2}=\sqrt{-2\left(c-1\right)^2+2}$，

$\therefore\left|x_1-x_2\right|\in\left(0,\sqrt{2}\,\right]$.

18、解：（1）在 ΔBCD 中，$\because \dfrac{BD}{\sin 60^0}=\dfrac{BC}{\sin\alpha}=\dfrac{CD}{\sin(120^0-\alpha)}$， ---2 分

$\therefore BD=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin\alpha}$, $CD=\dfrac{\sin(120^0-\alpha)}{\sin\alpha}$，则 $AD=1-\dfrac{\sin(120^0-\alpha)}{\sin\alpha}$。--------------------4 分

$s=400\cdot\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin\alpha}+100[1-\dfrac{\sin(120^0-\alpha)}{\sin\alpha}]=50-50\sqrt{3}\cdot\dfrac{\cos\alpha-4}{\sin\alpha}$，其中 $\dfrac{\pi}{3}\le\alpha\le\dfrac{2\pi}{3}$。…..6 分

（2） $s'=-50\sqrt{3}\cdot\dfrac{-\sin\alpha\cdot\sin\alpha-(\cos\alpha-4)\cos\alpha}{\sin^2\alpha}=50\sqrt{3}\cdot\dfrac{1-4\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$。--------------------8 分

令 $s'=0$ 得 $\cos\alpha=\dfrac{1}{4}$。记 $\cos\alpha_0=\dfrac{1}{4},\alpha_0\in(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3})$

当 $\cos\alpha>\dfrac{1}{4}$ 时， $s'<0$，--------------------.9 分当 $\cos\alpha<\dfrac{1}{4}$ 时， $s'>0$，--------------------10 分

所以 s 在 $(\dfrac{\pi}{3},\alpha_0)$ 上，单调递减，--------------------11 分在 $(\alpha_0,\dfrac{2\pi}{3})$ 上，单调递增，……..12 分

所以当 $\alpha=\alpha_0$，即 $\cos\alpha=\dfrac{1}{4}$ 时， s 取得最小值。--------------------13 分

此时，$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$， $AD=1-\dfrac{\sin(120^0-\alpha)}{\sin\alpha}=1-\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\frac{1}{2}\sin\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{15}}{4}}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{5}}{10}$ --------------------14 分

答：当 $AD=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{5}}{10}$ 时，可使总路程 s 最少。--------------------16 分

19、解：解答（1） 由题意可知 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ，$c=\sqrt{3}$ ，于是 $a=2$ ，$b=1$.

所以，椭圆的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.

（2） 设 $A(x_1,y_1)$ ，$B(x_2,y_2)$ ，$M(x_0,y_0)$ ，

$\begin{cases} y=k\left(x+\sqrt{3}\right), \\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1, \end{cases}$ 即 $\left(4k^2+1\right)x^2+8\sqrt{3}k^2x+12k^2-4=0$.

所以，$x_1+x_2=\dfrac{-8\sqrt{3}k^2}{4k^2+1}$ ，$x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{-4\sqrt{3}k^2}{4k^2+1}$ ，$y_0=k\left(x_0+\sqrt{3}\right)=\dfrac{\sqrt{3}k}{4k^2+1}$ ，

于是所以 $M\left(\dfrac{-4\sqrt{3}k^2}{4k^2+1},\dfrac{\sqrt{3}k}{4k^2+1}\right)$.

因为 $\dfrac{-4\sqrt{3}k^2}{4k^2+1}+4k\cdot\dfrac{\sqrt{3}k}{4k^2+1}=0$ ，所以 M 在直线 l 上.

（3） 由（2）知点 A 到直线 CD 的距离与点 B 到直线 CD 的距离相行，

若 $\triangle BDM$ 的面积是 $\triangle ACM$ 面积的 3 倍，
则 $|DM|=3|CM|$ ，因为 $|OD|=|OC|$ ，于是 M 为 OC 的中点.

设点 C 的坐标为 (x_3,y_3) ，则 $y_0=\dfrac{y_3}{2}$. 因为 $\begin{cases}x=-4ky,\\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$ 解得 $y_3=\pm\dfrac{1}{\sqrt{4k^2+1}}$ ，

于是 $\dfrac{1}{2\sqrt{4k^2+1}}=\dfrac{\sqrt{3}|k|}{4k^2+1}$ ，解得 $k^2=\dfrac{1}{8}$ ，所以 $k=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

20、解:（1）由已知 $f'(x)=\dfrac{2(\ln x-1)}{(\ln x)^2}$，因为 $x\in\left(e,e^2\right]$，所以 $f'(x)>0$，

所以函数 $y=f(x)$ 在区间 $\left(e,e^2\right]$ 上单调递增，又因为 $f(e)=2e, f\left(e^2\right)=e^2$，

所以函数 $y=f(x)$ 的值域为 $\left(2e,e^2\right]$

（2）函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,1)\cup(1,+\infty)$， $f'(x)=\dfrac{2(\ln x-1)}{(\ln x)^2}$，由 $f'(x)<0$，

解得 $0<x<1$ 或 $1<x<\mathrm{e}$，

函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0,1)$ 和 $(1,\mathrm{e})$.

（3）因为 $g(x)=a\mathrm{e}\ln x+\dfrac{1}{2}x^2-(a+\mathrm{e})x$，

由已知，若存在 $x_0\in[\mathrm{e},+\infty)$ 使函数 $g(x)=a\mathrm{e}\ln x+\dfrac{1}{2}x^2-(a+\mathrm{e})x\leqslant a$ 成立，

则只需满足当 $x\in[\mathrm{e},+\infty)$ 时， $g(x)_{\min}\leqslant a$ 即可.

又 $g(x)=a\mathrm{e}\ln x+\dfrac{1}{2}x^2-(a+\mathrm{e})x$，

则 $g'(x)=\dfrac{a\mathrm{e}}{x}+x-(a+\mathrm{e})=\dfrac{x^2-(a+\mathrm{e})x+a\mathrm{e}}{x}=\dfrac{(x-a)(x-\mathrm{e})}{x}$，

①若 $a\leqslant\mathrm{e}$，则 $g'(x)\geqslant 0$ 在 $x\in[e,+\infty)$ 上恒成立，

所以 $g(x)$ 在 $[e,+\infty)$ 上单调递增，所以 $g(x)_{\min}=g(e)=ae+\dfrac{1}{2}e^2-e(a+e)=-\dfrac{e^2}{2}$

所以 $a\geqslant-\dfrac{e^2}{2}$，又因为 $a\leqslant e$， $-\dfrac{e^2}{2}\leqslant a\leqslant e$

②若 $a>e$，则 $g(x)$ 在 $[e,a)$ 上单调递减，在 $[a,+\infty)$ 上单调递增

所以 $g(x)$ 在 $[e,+\infty)$ 上的最小值是 $g(a)$

又因为 $g(a)<g(e)=-\dfrac{e^2}{2}<0$，而 $a>e>0$，所以一定满足条件

综上所述，的取值范围是 $a\geqslant-\dfrac{\mathrm{e}^2}{2}$.