也谈空间向量的投影

崔 旺 保继光

(北京师范大学数学科学学院 100875)

1 向量及其数量积、投影的起源

向量作为沟通代数和几何的桥梁,在数学中有着重要的地位. 1967 年,美国数学家克罗威(Michael J. Crowe,1936—)在《向量分析的历史》[1]中指出,向量早期发展来源于数学和物理学. 数学中的向量研究可以从埃及和巴比伦时期一直延伸到现代,与数的概念的发展有着紧密的联系. 物理学中的向量研究也可以追溯到很久之前,与寻找代表物理量的数学概念和运算有着紧密的联系. 这两大传统科学在向量研究的历史上互相交叉互相促进.

古希腊哲学家亚里士多德(Aristotle,公元前 384—322)在《论力学》[2]中给出了速度的平行四边形法则. 1687 年英国科学家牛顿(Isaac Newton,1643—1727)在《自然哲学的数学原理》[3]中规定了力的平行四边形法则.

空间向量的发展与有向线段、复数、四元数的研究密切相关. 1844 年,德国数学家格拉斯曼(Hermann Günther Grassmann,1809—1877)发表了《线性外代数,数学的新分支》,通常译为"扩张的理论". 他从代数的角度引入了扩张量及其组合积[4,5],而向量及其内积是它们的一个特例或推论. 在三维空间中,记$\boldsymbol{e}_i$是与单位 1 和 $\sqrt{-1}$类似的扩张量单位,则两个扩张量 $\boldsymbol{a}=\sum\limits_{i=1}^{3}a_i\boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{b}=\sum\limits_{i=1}^{3}b_i\boldsymbol{e}_i$的组合积(combinatory product)定义为$[\boldsymbol{ab}]=\sum\limits_{i,j=1}^{3}a_ib_j[\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j]$,三个扩张量单位的组合积定义为 $[\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3]=1$,并且当任意两个扩张量单位交换顺序后组合积符号改变. 在此基础上,格拉斯曼定义扩张量 $\boldsymbol{b}$ 的补扩张量(complement of an extensive quantity)为 $|\boldsymbol{b}=\sum\limits_{i=1}^{3}b_i|\boldsymbol{e}_i=b_1[\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3]-b_2[\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3]+b_3[\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2]$,两个扩张量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的内积(inner product)为 $\boldsymbol{a}$ 与$|\boldsymbol{b}$ 的组合积,即 $[\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}]=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$. 他还用

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}&=\boldsymbol{x}_\alpha+\boldsymbol{x}_\beta+\boldsymbol{x}_\gamma\\&=\left(\frac{[\boldsymbol{x}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\gamma}]}{[\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\gamma}]}\right)\boldsymbol{\alpha}+\left(\frac{[\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{x}\boldsymbol{\gamma}]}{[\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\gamma}]}\right)\boldsymbol{\beta}+\left(\frac{[\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{x}]}{[\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\gamma}]}\right)\boldsymbol{\gamma}\end{aligned}$$

表示扩张量 $\boldsymbol{x}$ 在由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 生成的三维空间的分解,并把$\frac{[\boldsymbol{x}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\gamma}]}{[\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\gamma}]},\frac{[\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{x}\boldsymbol{\gamma}]}{[\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\gamma}]},\frac{[\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{x}]}{[\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\gamma}]}$分别叫做 $\boldsymbol{x}$ 在 $\boldsymbol{\alpha}$,$\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 的影子(shadow)[6]. 在这里影子是一个数量. 但是格拉斯曼的研究没有受到重视,当时吸引大部分学者的是爱尔兰数学家哈密尔顿(William Rowan Hamilton,1805—1865)的四元数.

向量(vector)一词就来源于 1846 年哈密尔顿在《哲学杂志》上发表的文章《论四元数》[7]. 哈密尔顿在《四元数讲义》[8]中,两个数量部分为 0 的四元数 $q=0+ix+jy+kz$,$q'=0+ix'+jy'+kz'$的乘积为

$$\begin{aligned}qq'=&-(xx'+yy'+z')+i(yz'-zy')+\\&j(zx'-xz')+k(xy'-yx').\end{aligned}$$

显然,数量部分为 0 的两个四元数的乘积的数量部分是现代向量分析中相应向量数量积的负值.

1867 年,苏格兰数学物理学家泰特(Peter Tait,1831—1901)在《四元数基础》[9]中赋予了四元数乘法的几何意义,得到了向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 乘积的数量部分 $S\boldsymbol{\alpha\beta}=-T\boldsymbol{\alpha}T\boldsymbol{\beta}\cos\theta$,其中 $T\boldsymbol{\alpha}$,$T\boldsymbol{\beta}$ 分别表示向量$\boldsymbol{\alpha}$,$\boldsymbol{\beta}$ 的长度,θ 表示 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的夹角.

在格拉斯曼和哈密尔顿研究的基础上,1877 年英国数学家克利福德(William Kingdon Clifford,1845—1879)在《动力学基础》[10]中定义了有向线段 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 的数量积(scalar product). 每个

平面区域表示为垂直于该区域,大小为该区域面积的有向线段. 如图1,有向线段$\overline{AB}$表示平面区域$ADEF$.

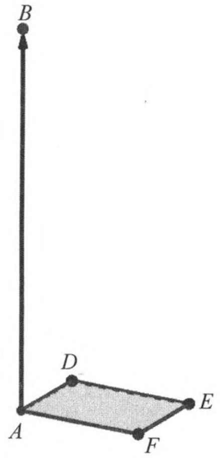

图 1

如图2,有向线段$\overline{AB}$和$\overline{AC}$的数量积定义为柱体$ADEF-CGHI$的体积,当柱体与AB在平面区域同侧时,体积取正值;当柱体与AB在平面区域异侧时,体积取负值. 则

$$S\overline{AB}\cdot\overline{AC}=AB\cdot AC\cdot\cos BAC.$$

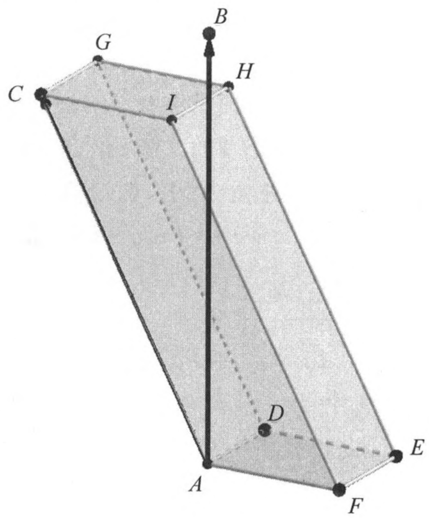

图 2

美国科学家吉布斯(Josiah Willard Gibbs, 1839—1903)与威尔逊(Edwin Bidwell Wilson, 1879—1964)建立了向量分析理论. 他们在1901年出版的《向量分析》[11]中定义:两个向量$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$的直接乘积(direct product)$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$是向量大小$A$,$B$的乘积$AB$,再乘以它们之间夹角$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$的余弦值所获得的数量

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=AB\cos(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}),$$

并在此基础上定义了向量$\boldsymbol{B}$在$\boldsymbol{A}$上的投影(projection)是向量

$$\frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}}\boldsymbol{A}=\frac{AB}{AA}A\boldsymbol{a}\cos(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$$
$$=B\cos(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\boldsymbol{a},$$

其中$\boldsymbol{a}$是与$\boldsymbol{A}$同向的单位向量.

从本质上讲,向量数量积的现代定义就是如此. 此后的变化主要体现在符号上.

2 现行教材中相关内容的安排

在现行的教材中,空间向量的教学内容通常被安排在平面向量和立体几何之后,空间向量数量积的定义和运算性质都是通过类比平面向量的情形获得的,并没有给出严格的证明. 在此基础上,教材引入了空间向量的投影,并把数量积的分配律应用到立体几何中线面垂直判定定理的证明.

在实际教学过程中,有些教师补证了空间向量数量积的分配律,但其中使用了线面垂直的判定定理,形成了循环论证. 到底能否避免这样的逻辑循环?本文给出了肯定的答案. 这需要从空间向量投影的定义说起.

(1)空间向量投影的定义

在各个版本的教材中,空间向量投影的概念可以分为三类. 2003和2007人教版、2011北师版、2015沪教版的教材将空间向量的投影定义为一个数量:"已知两个非零向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$,我们把数量$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$叫做向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的数量积,记作$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta,$$

其中θ是$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角,$|\boldsymbol{a}|\cos\theta$叫做向量$\boldsymbol{a}$在向量$\boldsymbol{b}$方向上的投影".

2012苏教版借助点到轴上的射影来定义空间向量的投影:"如图3,已知$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$和轴$l$,$\boldsymbol{e}$是与$l$同方向的单位向量,点$A$在$l$上的射影为$A'$,

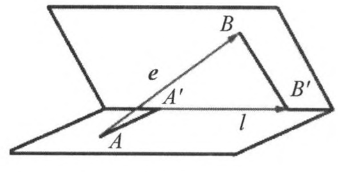

图 3

点 B 在 l 上的射影为 B'，如果用 $A'B'$ 表示以 A' 为起点，B' 为终点的有向线段的数量（与 l 同向为正，反向为负），那么 $A'B'$ 叫做向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 l 上（或在向量 $\boldsymbol{e}$ 方向上）的正投影，简称投影.”

2019 人教 B 版中的投影是一个向量：“如图 4 所示，设非零向量 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，过 A,B 分别作直线 l 的垂线，垂足分别为 A',B'，则称向量 $\overrightarrow{A'B'}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 在直线 l 上的投影向量或投影”.

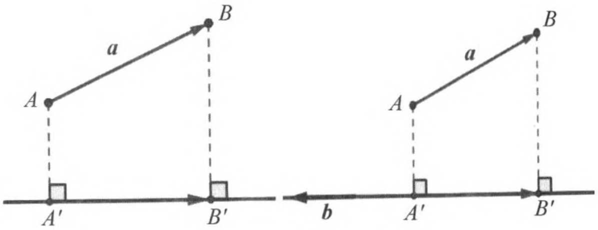

图 4

2019 人教 A 版教材将投影看成是一个变换，其定义为：“如图 5，设向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是两个非零向量，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{b}$，过 $\overrightarrow{AB}$ 的起点 A 和终点 B，分别作 $\overrightarrow{CD}$ 所在直线的垂线，垂足分别为 A_1，B_1，得到 $\overrightarrow{A_1B_1}$，我们称上述变换为向量 $\boldsymbol{a}$ 向向量 $\boldsymbol{b}$ 投影. $\overrightarrow{A_1B_1}$ 叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 方向上的投影向量”.

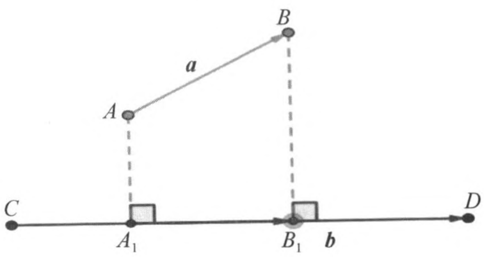

图 5

2019 北师版教材分别给出了投影向量和投影数量的概念.“已知两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，在空间任取一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，过点 B 作直线 OA 的垂线，垂足为点 B_1，称向量 $\overrightarrow{OB_1}$ 为向量 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 向量方向上的投影向量，其长度等于 $||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle|$. 若用 $\boldsymbol{a}_0$ 表示与向量同方向的单位向量，则向量 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 向量方向上的投影向量为

$$\overrightarrow{OB_1}=|\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\boldsymbol{a}_0.$$

因此，称 $|\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 为投影向量 $\overrightarrow{OB_1}$ 的数量，即向量 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 向量方向上的投影数量”.

绝大部分教材的空间向量投影的定义都是在空间向量数量积的定义之后给出的. 在这样的教材内容安排下，教师和学生忽视了投影概念的直观理解和几何意义，过多地注重利用数量积来计算投影数量，而不是利用投影去理解数量积的意义，不利于学生对空间向量投影概念的掌握.

(2)空间向量数量积分配律的证明

由于任意两个向量都是共面向量，所以空间向量的加法、减法与数乘运算性质及数量积的交换律和平面向量情形是一致的. 但是，教材一般都没有注意到分配律是关于三个向量的，具有空间向量的特色，因而也没有给出具体明确的证明. 在教学过程中，最常见的讲授空间向量数量积分配律的方法是类比平面向量数量积分配律的证明方法.

为了更清楚地说明问题，让我们回忆一下教材中关于平面向量数量积分配律的证明.

性质　设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为平面向量，则

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}.$$

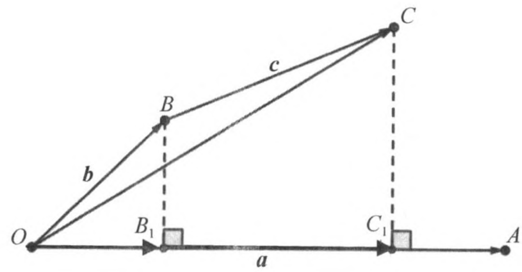

图 6

证明　如图 6，设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$，$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{BC}$，$\boldsymbol{a}_0$ 是与 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量. 易知 $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$. 由平面几何知识，有

$$\overrightarrow{OB_1}=|\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\rangle\boldsymbol{a}_0,$$

$$\overrightarrow{B_1C_1}=|\boldsymbol{c}|\cos\langle\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}\rangle\boldsymbol{a}_0,$$

$$\overrightarrow{OC_1}=|\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|\cos\langle\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}\rangle\boldsymbol{a}_0.$$

又因为 $\overrightarrow{OC_1}=\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{B_1C_1}$，得到

$$|\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|\cos\langle\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}\rangle\boldsymbol{a}_0$$
$$=|\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\rangle\boldsymbol{a}_0+|\boldsymbol{c}|\cos\langle\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}\rangle\boldsymbol{a}_0.$$

两边同时乘以 $|\boldsymbol{a}|$，由数量积的定义可知

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}.$$

但是，上述证明在类比到空间向量的过程中，$\overrightarrow{B_1C_1}=|\boldsymbol{c}|\cos\langle\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}\rangle\boldsymbol{a}_0$ 却不能够像平面情形那样容易得到. 在空间向量教学过程中，通常采用的证明 $\overrightarrow{B_1C_1}=|\boldsymbol{c}|\cos\langle\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}\rangle\boldsymbol{a}_0$ 的方法是：

如图7,做 $BB_1\perp OA$,$CC_1\perp OA$. 过点 B_1 做向量 $\overrightarrow{B_1E}=\overrightarrow{BC}$,则 $CE\perp OA$. 由线面垂直的判定定理,$OA\perp$ 平面 CEC_1. 由线面垂直的定义知 $OA\perp EC_1$,所以 $\overrightarrow{B_1C_1}=|\boldsymbol{c}|\cos\langle\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}\rangle\boldsymbol{a}_0$.

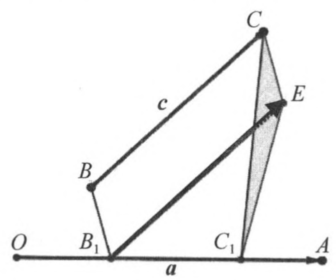

图7

在上面的证明过程中就用到了线面垂直的判定定理. 同时,在有的教材中又应用空间向量数量积的分配律证明线面垂直判定定理. 这样就出现逻辑循环的错误.

3 教材和教学建议

为了克服上述存在的问题,现在给出切实可行的教材编写和教学实践建议.

我们从几何角度定义投影、投影向量、投影数量.

定义1 如图8,设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$,$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{CD}$ 为非零的空间向量,过点 A,B 分别做 $\boldsymbol{b}$ 所在直线的垂线,垂足为 A_1,B_1,得到向量 $\overrightarrow{A_1B_1}$,称 $\overrightarrow{A_1B_1}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 方向上的投影向量. 由 $\overrightarrow{AB}$ 得到 $\overrightarrow{A_1B_1}$ 的过程叫做 $\boldsymbol{a}$ 向 $\boldsymbol{b}$ 上的投影.

当 $\overrightarrow{A_1B_1}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同时,$|\overrightarrow{A_1B_1}|$ 叫做 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 方向上的投影数量;当 $\overrightarrow{A_1B_1}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相反时,$-|\overrightarrow{A_1B_1}|$ 叫做 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 方向上的投影数量.

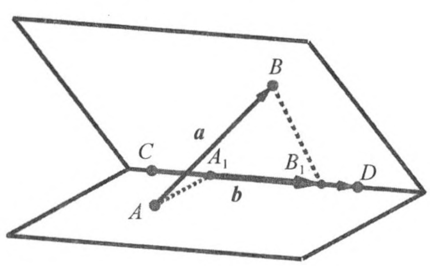

图8

如果 $\boldsymbol{b}_0$ 是 $\boldsymbol{b}$ 的单位向量,由共线向量基本定理知,存在唯一实数 λ,使得 $\overrightarrow{A_1B_1}=\lambda\boldsymbol{b}_0$. 实际上,$\lambda$ 就是 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 方向上的投影数量.

定义1不依赖空间向量的数量积,投影向量和投影数量都有相应的几何直观.

向量作为几何和代数之间的桥梁,建立上述几何直观的代数表示是一个重要的问题. 下面,我们借助定义1和基本几何知识给出投影向量、投影数量的代数表示.

定理1 设 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 是两个非零的空间向量,$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ,$\boldsymbol{b}_0$ 是 $\boldsymbol{b}$ 的单位向量,则 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量是 $|\boldsymbol{a}|\cos\theta\,\boldsymbol{b}_0$,投影数量是 $|\boldsymbol{a}|\cos\theta$.

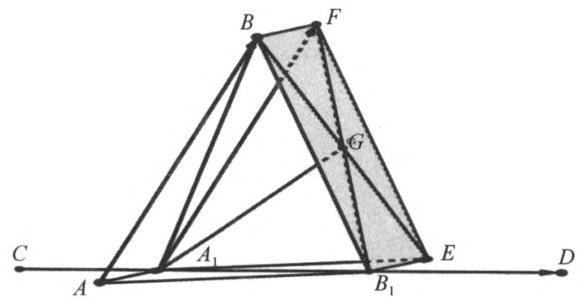

图9

证明 如图9,设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$,$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{CD}$,分别做 $AA_1\perp CD$,$BB_1\perp CD$. 所以 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 方向上的投影向量为 $\overrightarrow{A_1B_1}$. 过点 B_1 做 $\overrightarrow{B_1E}=\overrightarrow{AA_1}$,过点 A_1 做 $\overrightarrow{A_1F}=\overrightarrow{AB}$. 易证四边形 AA_1EB_1,AA_1FB 为平行四边形,所以四边形 BB_1EF 为平行四边形. 由"平行四边形对角线长度的平方和等于相邻两边平方和的2倍"得

$$(2|B_1G|)^2+|BE|^2=2|B_1E|^2+2|B_1B|^2,$$

$$(2|A_1G|)^2+|BE|^2=2|A_1E|^2+2|A_1B|^2,$$

从而

$$|A_1G|^2-|B_1G|^2=\frac{1}{2}(|A_1E|^2-|B_1E|^2)+\frac{1}{2}(|A_1B|^2-|B_1B|^2).$$

又因为 $B_1E\perp A_1B_1$,$BB_1\perp A_1B_1$,由勾股定理上式可化简为

$$|A_1G|^2-|B_1G|^2=\frac{1}{2}|A_1B_1|^2+\frac{1}{2}|A_1B_1|^2=|A_1B_1|^2.$$

由勾股定理的逆定理,$B_1G\perp A_1B_1$,所以 $\overrightarrow{A_1F}$ 在向量 $\overrightarrow{CD}$ 上的投影向量为 $\overrightarrow{A_1B_1}$.

因为 $\overrightarrow{A_1F}=\overrightarrow{AB}$,$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ. 所以 $\overrightarrow{A_1F}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ,

$$|\overrightarrow{A_1B_1}|=||\overrightarrow{A_1F}|\cos\theta|=||\boldsymbol{a}|\cos\theta|.$$

当 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$，投影向量 $\overrightarrow{A_1B_1}=|\boldsymbol{a}|\cos\theta\boldsymbol{b}_0$，其投影数量为 $|\overrightarrow{A_1B_1}|=|\boldsymbol{a}|\cos\theta$，

当 $\theta\in\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$，投影向量 $\overrightarrow{A_1B_1}=\mathbf{0}$，其投影数量为 $|\overrightarrow{A_1B_1}|=0$，

当 $\theta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$，投影向量 $\overrightarrow{A_1B_1}=|\boldsymbol{a}|\cos\theta\boldsymbol{b}_0$，其投影数量为 $-|\overrightarrow{A_1B_1}|=-||\boldsymbol{a}|\cos\theta|=|\boldsymbol{a}|\cos\theta$.

我们通过定理 1 清晰地看到了空间向量的投影向量、投影数量和数量积之间的关系，为数量积的教学奠定了几何基础. 下面我们借助投影向量给出空间向量数量积的分配律的证明.

定理 2 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为空间向量，则

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}.$$

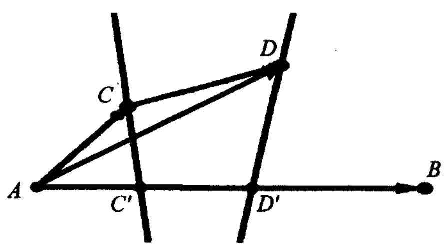

图 10

证明 如图 10，设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB},\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC},\boldsymbol{c}=\overrightarrow{CD}$，与 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量为 $\boldsymbol{a}_0$. 由向量加法的法则知 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\overrightarrow{AD}$. 过点 C,D 做直线 AB 的垂线，垂足为 C',D'，则由定理 1 知，

$$\overrightarrow{AC'}=|\overrightarrow{AC}|\cos<\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}>\boldsymbol{a}_0=|\boldsymbol{b}|\cos<\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}>\boldsymbol{a}_0,$$

$$\overrightarrow{C'D'}=|\overrightarrow{CD}|\cos<\overrightarrow{CD},\overrightarrow{AB}>\boldsymbol{a}_0=|\boldsymbol{c}|\cos<\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}>\boldsymbol{a}_0,$$

$$\overrightarrow{AD'}=|\overrightarrow{AD}|\cos<\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}>\boldsymbol{a}_0=|\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|\cos<\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}>\boldsymbol{a}_0.$$

又因为 $\overrightarrow{AD'}=\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{C'D'}$，所以

$$|\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|\cos<\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}>\boldsymbol{a}_0=|\boldsymbol{b}|\cos<\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}>\boldsymbol{a}_0+|\boldsymbol{c}|\cos<\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}>\boldsymbol{a}_0.$$

两边同时乘 $|\boldsymbol{a}|$，得

$$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|\cos<\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}>\boldsymbol{a}_0=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos<\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}>\boldsymbol{a}_0+|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{c}|\cos<\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}>\boldsymbol{a}_0,$$

由数量积的定义，有

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}.$$

在上述证明过程中，没有借助线面垂直的判定定理就证明了空间向量数量积的分配律. 因此，教材中利用空间向量数量积分配律去证明线面垂直判定定理是合理的，不会产生逻辑循环的错误.

在空间向量的教学过程中，我们建议按照定义 1 给出空间向量投影向量和投影数量的几何定义，通过定理 1 获得空间向量投影向量和投影数量的代数表示. 这样向量几何与代数的双重属性表现得非常清楚. 在此基础上，进行空间向量数量积运算性质及其应用的教学. 特别需要注意的是，既要避免简单地运用空间向量类比平面向量的思想，又要避免空间向量数量积分配律和线面垂直判定定理出现的逻辑循环错误. 本文定理 2 的证明是至关重要的.

参考文献

[1] M. J. Crowe. A History of Vector Analysis [M]. New York: Dover Publications, 1967

[2] T. L. Heath. A History of Greek Mathematics [M]. New York: Dover Publications, 1921

[3] I. Newton. Philosophiæ naturalis principia mathematica [M]. London: Jussu Societas Regiæ ac typis Josephi Streater, prostant venales apud Sam. Smith, 1687

[4] J. V. Collins. An Elementary Exposition of Grassmann's Ausdehnungslehre or Theory of Extension [J]. The American Mathematical Monthly. 6 (8/9) (1899), 193－198

[5] H. Grassmann. Extension Theory [M]. translated by Lloyd C. Kannenberg. American Mathematical Society and London Mathematical Society, 2000

[6] J. Browne. Grassmann Algebra [M]. Eltham: Barnard Publishing, 2012

[7] W. R. Hamilton. On quaternions; or on a new system of imaginaries in algebra [J]. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 3 (1846), 1844－1850

[8] W. R. Hamilton. Lectures On Quaternions [M]. Cornell University Library, 1992

[9] P. Tait. An Elementary Treatise on Quaternions [M]. The third edition. Cambridge: Cambridge at the University Press, 1890

[10] W. K. Clifford. Elements of Dynamic [M]. London and New York: Macmillan and Company, 1877

[11] J. W. Gibbs, E. B. Wilson. Vector analysis [M]. New York: Scribner, 1902