鄂南高中 黄冈高中 黄石二中 荆州中学 龙泉中学

武汉二中 孝感高中 襄阳四中 襄阳五中 宜昌一中 夷陵中学

2022 届高三湖北十一校第一次联考

数学试题

命题学校：孝感高中 命题人： 武娟 陈慧玲 柴全中　　审题人：褚卫斌

一、单选题： 本大题共 8 小题， 每小题 5 分， 共 40 分． 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目 要求的．

1. 若集合 $A=\left\{x \mid x^2-3x\le 0\right\}$， 集合 $B=\{x|1\le x<5\}$， 则 $A\cup B=()$

A． $\{x|\ x<5\}$

B． $\left\{x|1\le x\le 3\right\}$

C． $\{x|0\le x<5\}$

D． $\{x|3\le x<5\}$

2. 方程 $\dfrac{x^2}{2+m}-\dfrac{y^2}{1-m}=1$ 表示双曲线， 则 m 的取值范围是 ( )

A． $-2<m<1$

B． $m>1$

C． $m<-2$

D． $-1<m<2$

3. 设 $m\in \mathrm{R}$， 向量 $\vec{a}=(m,1),\vec{b}=(4,m),\vec{c}=(1,-2)$， 则 $\vec{a}//\vec{b}$ 是 $\vec{a}\perp\vec{c}$ 的 ( ) 条件

A． 充分不必要

B． 必要不充分

C． 充要

D． 既不充分也不必要

4. 函数 $f(x)=\cos 2x+2\sin x, x\in[0,\pi]$ 的最大值为 ( )

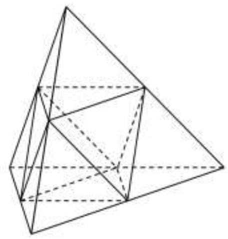
A． $\dfrac{1}{2}$

B． 1

C． $\dfrac{3}{2}$

D． 2

5. 连接正四面体每条棱的中点， 形成如图所示的多面体， 则该多面体的体积是原正四面体体积的（）



A． $\frac{1}{3}$

B． $\frac{3}{8}$

C． $\frac{2}{3}$

D． $\frac{1}{2}$

6. 已知数列 $\{a_n\}(n\in \mathrm{N}^*)$ 是等差数列， S_n 是其前 n 项和， 若 $a_2a_5+a_8=0, S_9=27$， 则数列 $\{a_n\}$ 的公差是(　)

A． 1

B． 2

C． 3

D． 4

7. 函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象与 y 轴交于点 $M(0,-1)$，图象上离 y 轴最近的最高点为 $N(\frac{\pi}{4},2)$, 若对 $\forall x_1,x_2\in(-a,a), x_1\neq x_2$, 恒有 $f(x_1)\neq f(x_2)$, 则实数 a 的最大值为(　)

A． $\frac{\pi}{4}$

B. $\frac{\pi}{6}$

C． $\frac{\pi}{8}$

D． $\frac{\pi}{12}$

8. 若关于 x 的方程 $x(|x|+a)=1$ 有三个不同的实数解，则实数 a 的可能取值(　)

A． －5

B． －2

C． 2

D． 3

二、多选题： 本大题共 4 小题， 每小题 5 分， 共 20 分． 在每小题列出的四个选项中，

有多个选项是符合题 目要求的， 全部选对得 5 分， 部分选对得 2 分， 有选错的得 0 分.

9. 下列说法正确的的有（）

A． 已知一组数据 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_{10}$ 的方差为 3， 则 $x_1+2,x_2+2,x_3+2,\cdots,x_{10}+2$ 的方差也为 3

B． 对具有线性相关关系的变量 x,y， 其线性回归方程为 $\hat{y}=0.3x-m$， 若样本点的中心为 $\left(m,2.8\right)$， 则实数 m 的值是 4

C． 已知随机变量 X 服从正态分布 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$， 若 $P(X>-1)+P\left(X\geq 5\right)=1$， 则 $\mu=2$

D． 已知随机变量 X 服从二项分布 $B\left(n,\frac{1}{3}\right)$， 若 $E\left(3X+1\right)=6$， 则 $n=6$

10. 三角形 $\triangle ABC$ 中， 角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c， 下列条件能判断 $\triangle ABC$ 是钝角三角形的有 ( )

A． $a=6,b=5,c=4$

B． $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=2a$

C． $\dfrac{a-b}{c+b}=\dfrac{\sin C}{\sin A+\sin B}$

D． $b^2\sin^2 C+c^2\sin^2 B=2bc\cos B\cos C$

11. 2021 年 3 月 30 日， 我国知名品牌小米公司启用了具备 “超椭圆” 数学之美的全新 *Logo*. 据了解， 新 *Logo* 将原本方正的橙色边框换成了圆角边框， 这种由方到圆的弧度变化， 为小米融入了东方哲学的思想， 赋予 了品牌生命的律动感， 而设计师的灵感来源于数学中的曲线 $C:\left|x\right|^n+\left|y\right|^n=1$， 则下列说法正确的有( )

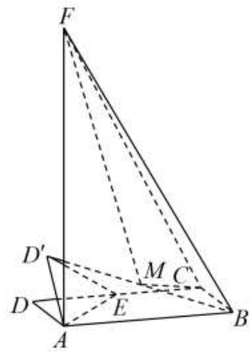
A． 对任意的 $n\in\mathrm{R}$， 曲线 C 总关于原点成中心对称

B． 当 $n>0$ 时， 曲线 C 总过四个整点 (横、纵坐标都为整数的点)

C． 当 $n=-1$ 时， 曲线 C 上点到原点距离的最小值为 $2\sqrt{2}$

D． 当 $0<n<1$ 时， 曲线 C 围成图形的面积可以为 2

12. 如图， 已知矩形 $ABCD,AB=\sqrt{3},AD=1,AF\perp$ 平面 $ABCD$， 且 $AF=3$， 点 E 为线段 DC (除端点外) 上的一点． 沿直线 AE 将 $\triangle DAE$ 向上翻折成 $\triangle D'AE$， M 为 BD' 的中点， 则下列说法正确的有 ( )



A． 三棱锥 $A-BCF$ 的体积为 $\frac{3}{2}\sqrt{3}$

B． 当点 E 固定在线段 DC 某位置时， 则 D' 在某圆上运动

C． 当点 E 在线段 DC 上运动时， 则 D' 在某球面上运动

D． 当点 E 在线段 DC 上运动时， 三棱锥 $M-BCF$ 的体积的最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{12}$

三、填空题： 本大题共 4 小题， 每小题 5 分， 共 20 分.

13. 若复数 z 满足 $\frac{1+3i}{z}=1-i$， 则 $|z|=$__________ .

14. 在一次社团活动中， 甲乙两人进行象棋比赛， 规定每局比赛获胜的一方得 3 分， 负的一方得 1 分 (假设 没有平局). 已知甲胜乙的概率为 0.6， 若甲乙两人比赛两局， 且两局比赛结果互不影响. 设两局比赛结束 后甲的得分为 ξ， 则 $E(\xi)=$ __________ .

15. 线段 AB 是圆 $O:x^2+y^2=4$ 的一条动弦， 且 $|AB|=2\sqrt{3}$， 直线 $l:mx-y+3-4m=0$ 恒过定点 P， 则 $\left|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}\right|$ 的最小值为________.

16. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-x$， 则 $f(x)$ 的单调递增区间为________； 若对任意的 $x\in(0,+\infty)$， 不等式 $\mathrm{e}^x-1\geq\frac{\ln x+2a}{x}$ 恒成立， 则实数 a 的取值范围为________.

四、解答题： 本大题共 6 小题， 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分) 在锐角 $\triangle ABC$ 中， 角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c， 已知 $a-2c\cos B=c$.

(1) 求证： $B=2C$.

(2) 若 $c=1$， 求 b 的取值范围.

18. (12 分) 自 2021 年 9 月以来， 某中学实行封闭式管理， 学生均在学校食堂就餐. 为了解学生对食堂服务 的满意度， 食堂作了一次随机调查， 已知被调查的男

女生人数相同均为 $m\left(m\in \mathrm{N}^{*}\right)$． 调查显示男生满意的人 数占男生人数的 $\dfrac{3}{5}$， 女生满意的人数占女生人数的 $\dfrac{4}{5}$， 且经以下 2×2 列联表计算可得 K^{2} 的观测值 $k\approx 4.762$．

	男生	女生	合计
满意			
不满意			
合计			

(1) 求 m 的值， 完成上述表格， 并判断有多大的把握认为学生对食堂服务的评价与性别有关?

(2) 为进一步征集学生对食堂的意见， 食堂又采用分层抽样的方法从上述表示不满意的学生中随机抽 取 9 人， 再从这 9 人中抽取 3 人进行面对面交流， 求事件 “至少抽到一名女生” 的概率.

附表：

$P\left(K^{2}\geqslant k_{0}\right)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.001
k_{0}	2.706	3.841	5.024	6.635	10.828

附:$K^{2}=\dfrac{n(ad-bc)^{2}}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

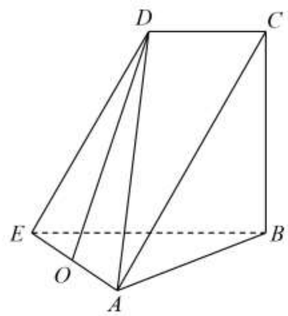
19. (12 分) 已知数列 $\left\{a_{n}\right\}$ 的前 n 项和为 S_{n}， 且满足 $a_{1}=\dfrac{1}{2},S_{n}=1-2a_{n+1},n\in \mathrm{N}^{*}$

(1) 求数列 $\left\{a_{n}\right\}$ 的通项公式;

(2) 记数列 $\left\{(2n-1)a_{n}\right\}$ 的前 n 项和为 T_{n}． 若 $\langle m\rangle$ 表示不大于 m 的正整数的个数， 求 $\langle T_{1}\rangle+\langle T_{2}\rangle+\cdots+\langle T_{10}\rangle$．

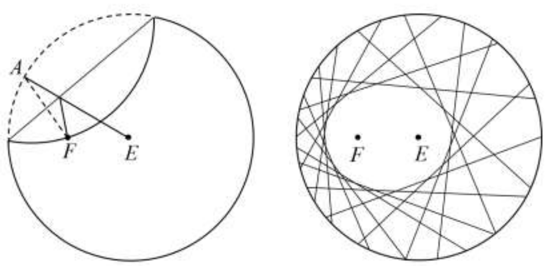
20. (12 分) 如图， 在四棱锥 $A-BCDE$ 中

$CD//BE, CD=\frac{1}{2}EB=1, CB\perp BE, AE=AB=BC=\sqrt{2}, AD=\sqrt{3}$， O 是 AE 的中点.



(1) 求证： $DO//$ 平面 ABC；
(2) 求 DA 与平面 ABC 所成角的正弦值.

21. (12 分) “工艺折纸” 是一种把纸张折成各种不同形状物品的艺术活动， 在我国源远流长. 某些折纸活动 蕴含丰富的数学内容， 例如： 用一张圆形纸片， 按如下步骤折纸 (如下图)



步骤 1： 设圆心是 E， 在圆内异于圆心处取一点， 标记为 F；
步骤 2： 把纸片折叠， 使圆周正好通过点 F；
步骤 3： 把纸片展开， 并留下一道折痕;
步骤 4： 不停重复步骤 2 和 3， 就能得到越来越多的折痕.
已知这些折痕所围成的图形是一个椭圆. 若取半径为 4 的圆形纸片， 设定点 F 到圆心 E 的距离为 2，
按上述方法折纸.
(1) 以点 F、E 所在的直线为 x 轴， 建立适当的坐标系， 求折痕围成的椭圆的标准方程;
(2) 直线 l 过椭圆 C 的右焦点 F_2， 交该椭圆于 A、B 两点， AB 中点为 Q， 射线 OQ(O 为坐标原点) 交 椭圆于 P， 若 $\overrightarrow{QP}=3\overrightarrow{OQ}$， 求直线 l 的方程.

22. (12 分) 已知函数 $f\left(x\right)=2\ln x, g\left(x\right)=\frac{1}{2}ax^2-2x(a>0)$.

（1）若直线 $y=2ex+m$ (e 为自然对数的底数) 与函数 $y=f\left(x\right), y=g\left(x\right)$ 的图象均

相切，求实数 a 的值.

(2) 设函数 $h(x)=f(x)+g(x)-(a+2)x+3$.

(i) 证明：函数 $h(x)$ 有两个极值点 x_1,x_2；

(ii) 对 (i) 中的两个极值点 x_1,x_2，若 $h(x_1)+h(x_2)\le -a-3$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

2022 届高三湖北十一校第一次联考

数学参考答案

一. 单选题 CABC DBCA

1.【答案】C

【解析】因为 $A=\{x\mid x^2-3x\le 0\}$ = $\{x\mid 0\le x\le 3\}$，$B=\left\{x\middle|1\le x<5\right\}$，则 $A\cup B=\left\{x\middle|0\le x<5\right\}$，故选 C.

2.【答案】A

【解析】因为方程 $\dfrac{x^2}{2+m}-\dfrac{y^2}{1-m}=1$ 表示双曲线，所以 $(2+m)(1-m)>0$，即 $(m+2)(m-1)<0$，

解得：$-2<m<1$. 故选 A.

3.【答案】B

【解析】由 $\vec{a}//\vec{b}$ 可得 $m^2-4=0$，所以 $m=\pm 2$；由 $\vec{a}\perp\vec{c}$ 可得 $m-2=0$，所以 $m=2$，

则 $\vec{a}//\vec{b}$ 是 $\vec{a}\perp\vec{c}$ 的必要不充分条件，故选 B.

4.【答案】C

【解析】 $f(x)=1-2\sin^2 x+2\sin x=-2(\sin x-\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{3}{2}$. 又 $x\in[0,\pi]$，则 $\sin x\in[0,1]$，所以当 $\sin x=\dfrac{1}{2}$ 时，

$f(x)$ 取得最大值 $\dfrac{3}{2}$. 故选 C.

5. 【答案】D

【解析】由题意可知，该多面体可看作正四面体截去四个棱长为 $\dfrac{1}{2}$ 的小正四面体所得的正八面体，

则 $V_{多面体}=V_{正四面体}-4\times(\frac{1}{2})^3V_{正四面体}=\frac{1}{2}V_{正四面体}$. 故选 D.

6.【答案】 B

【解析】由 $S_9=27=9a_5$，得 $a_5=3$，则 $a_2a_5+a_8=(a_5-3d)a_5+(a_5+3d)=0$，故 $d=2$

7.【答案】 C

【解析】由题易得 $A=2,\varphi=-\frac{\pi}{6}$，结合图象可知，$\frac{\pi}{4}\omega-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，则 $\omega=\frac{8}{3}+8k(k\in Z)$，

又 $\frac{T}{4}<\frac{\pi}{4}<\frac{T}{2}$，所以 $2<\omega<4$，

则 $\omega=\frac{8}{3}$，则 $f(x)=2\sin(\frac{8}{3}x-\frac{\pi}{6})$ ．$\forall x_1,x_2\in(-a,a),x_1\neq x_2$，恒有 $f(x_1)\neq f(x_2)$，则

$f(x)$ 在 $(-a,a)$ 单调. 令 $f(x)=-2$，得到 y 轴左侧最近的最低点为 $(-\frac{\pi}{8},-2)$，右侧最近的最高点为 $(\frac{\pi}{4},2)$，则 a 的最大值为 $\frac{\pi}{8}$． 故选 C.

8.【答案】 A

【解析】易知 $x=0$ 不是方程的解，则方程可变形为 $|x|+a=\frac{1}{x}$，可考虑函数 $y=|x|+a$ 与 $y=\frac{1}{x}$ 的图象共有三个公共点.

当 $a\geq 0$ 时，仅 2 个公共点，不符合；当 $a<0$ 时，结合图象可得 $a<-2$，故选 A.

二. 多选题 AC BC ABC BCD

9. 【答案】AC

【解析】A: 由方差公式，将一组数据中的每个数据都加上同一常数后，方差不变，故 A 正确；

B: 线性回归直线过样本点中心，求得 $m=-4$，故 B 错误；

C: 因为随机变量 X 服从正态分布 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$，对称轴为 $X=\mu$，又 $P\left(X>-1\right)+P\left(X\geq 5\right)=1$，

而$P(X>-1)+P(X\le -1)=1$，所以$P(X\ge 5)=P(X\le -1)$，则$\mu=\dfrac{5+(-1)}{2}=2$，故 C 正确；

D：X 服从二项分布$B\left(n,\dfrac{1}{3}\right)$，由$E(3X+1)=3E(X)+1=3\times n\times\dfrac{1}{3}+1=6$，则$n=5$，故 D错误.

10. 【答案】BC

【解析】

A：由$a>b>c$可知$A>B>C$，且$b^2+c^2=41>36=a^2$，所以A是锐角，故 A 不正确；

B：由$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-ac\cos B=2a$，得$\cos B<0$，则$B$为钝角，故 B 正确；

C:由正弦定理$\dfrac{a-b}{c+b}=\dfrac{c}{a+b}$，得$b^2+c^2-a^2=-bc$，则$\cos A=-\dfrac{1}{2}$，$A=\dfrac{2\pi}{3}$，故 C 正确；

D:**法一**：由正弦定理，条件等价于$\sin^2 B\sin^2 C+\sin^2 C\sin^2 B=2\sin B\sin C\cos B\cos C$，

则$\sin B\sin C=\cos B\cos C$，即$\cos(B+C)=0$，故$B+C=\dfrac{\pi}{2}$，则$A=\dfrac{\pi}{2}$，故 D 不正确.

法二：$2bc\cos B\cos C=b^2\sin^2 C+c^2\sin^2 B\ge 2bc\sin B\sin C$，得$\tan B\tan C\le 1$. 取$B=C=\dfrac{\pi}{4}$，则$A=\dfrac{\pi}{2}$，故 D 不正确.

11.【答案】ABC

【解析】A：由$|\pm x|^n+|\pm y|^n=1$，易知 A 正确；

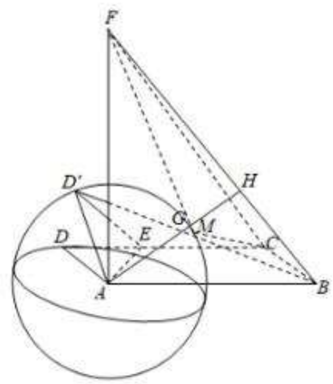
B：当$n>0$时，取$x=0,y=\pm1$；取$y=0,x=\pm1$，曲线 C 总过四个整点$(0,\pm1)$和$(\pm1,0)$. 故 B 正确；

C：当$n=-1$时，曲线C：$\dfrac{1}{|x|}+\dfrac{1}{|y|}=1$，即$|y|=1+\dfrac{1}{|x|-1}$，由函数图象，结合对称性，

可知第一象限内点(2，2)到原点距离最近，最近距离为$2\sqrt{2}$，故 C 正确；

D：当$0<n<1$时，$|x|\le1,|y|\le1$，从而$|x|+|y|<|x|^n+|y|^n=1$，

曲线 C 围成的图形在正方形$|x|+|y|=1$ 的内部，面积小于正方形$|x|+|y|=1$的面积 2.



故 D 错误.

12. 【答案】BCD

【解析】A：$V_{A\text{-}BCF}=V_{F\text{-}ABC}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times 3=\frac{\sqrt{3}}{2}\neq\frac{3}{2}\sqrt{3}$，故 A 错误；

B: 当固定点 E 时，由 $DA\perp DE$，可知点 D 在以 AE 为直径的圆上运动，故 B 正确；

C: 当点 E 在线段 DC 上运动时，$AD'=1$ 保持不变，即 D' 的轨迹为以 A 为球心，半径为 1 的球面的一部分，故 C 正确；

D：$\because S_{\Delta BCF}=\frac{1}{2}\times BC\times BF=\frac{1}{2}\times 1\times\sqrt{9+3}=\sqrt{3}$，$\therefore$ 求三棱锥 $M-BCF$ 的体积的最小值即求 M 到面 BCF 距离 d_1 的最小值，

即求 D' 到面 BCF 距离 d 的最小值，且 $d_1=\frac{1}{2}d$. 过 A 作 BF 的垂线，垂足为 H，可得 AH$\perp$平面 BCF，因为 D' 在为以 A 为球心，半径为 1 的球面上运动, 则 D' 到面 BCF 距离的最小值为 $d=AH-1=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$，$d_1=\frac{1}{2}d=\frac{1}{4}$. 所以三棱锥 $M-BCF$ 的体积的最小值 $V_{\min}=S_{\Delta BCF}\times d_1=\frac{\sqrt{3}}{12}$，故 D 正确.

三. 填空题

13. 【答案】$\sqrt{5}$

【解析】**法一**：由题意 $z=\frac{1+3i}{1-i}=\frac{(1+3i)\cdot(1+i)}{(1-i)\cdot(1+i)}=\frac{-2+4i}{2}=-1+2i$, 则 $|z|=\sqrt{(-1)^2+(2)^2}=\sqrt{5}$.

法二: 由复数性质 $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$, 则 $|z|=\left|\frac{3+4i}{1-2i}\right|=\frac{|3+4i|}{|1-2i|}=\frac{\sqrt{3^2+4^2}}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\sqrt{5}$，故填 $\sqrt{5}$.

14.【答案】4.4

【解析】ξ可取$2,4,6$. $P(\xi=2)=0.4\times0.4=0.16$，$P(\xi=4)=C_2^1 0.6\times0.4=0.48$，

$P(\xi=6)=0.6\times0.6=0.36$，所以$E(\xi)=2\times0.16+4\times0.48+6\times0.36=4.4$

15.【答案】8

【解析】因为线段AB是圆$O:x^2+y^2=4$的一条动弦，过圆心O作$OE\perp AB$于点E，

则E为AB中点，又$|AB|=2\sqrt{3}$，则$OE=\sqrt{4-3}=1$，即点E的轨迹为圆$0:x^2+y^2=1$，

直线$l:mx-y+3-4m=0$可化为$y-3=m(x-4)$，则直线l恒过定点$P(4,3)$，因为$\left|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}\right|=2\left|\overrightarrow{PE}\right|$，

由可知$\left|\overrightarrow{PE}\right|_{\min}=|OP|-r\ \ =5-1=4$，所以$\left|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}\right|$的最小值为8. 故填8.

16.【答案】$(0,+\infty)$（填$[0,+\infty)$亦可）；$(-\infty,\frac{1}{2}]$

【解析】$f'(x)=e^x-1$，令$f'(x)>0$，得$f(x)$的单调递增区间$(0,+\infty)$（或$[0,+\infty)$亦可）；

$e^x-1\ge\dfrac{\ln x+2a}{x}$可化为$2a\le e^x\cdot x-x-\ln x$.设$g(x)=e^x\cdot x-x-\ln x(x>0)$

法一： $g'(x)=\dfrac{(e^x\cdot x-1)(x+1)}{x}(x>0)$，记$\varphi(x)=e^x\cdot x-1$，显然$\varphi(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，由零点存在性定理可知存在$x_o$，

使$\varphi(x_o)=e^{x_o}\cdot x_o-1=0$，则可知$g(x)$在$(-\infty,x_o)$上单调递减，在$(x_o,+\infty)$上单调递增，

则$g(x)\ge g(x_o)=e^{x_o}\cdot x_o-x_o-\ln x_o\ \ =1-x_o-\ln\dfrac{1}{e^{x_o}}=1-x_o+x_o=1$，则$2a\le1$，故$a\le\dfrac{1}{2}$.

法二： $g(x)=e^x\cdot x-x-\ln x=e^x\cdot e^{\ln x}-x-\ln x=e^{x+\ln x}-(x+\ln x)$，设$t=x+\ln x$，则$g(t)=e^t-t$，由第一空可知$g(t)\ge g(0)=e^0-0=1$，则$2a\le1$，故$a\le\dfrac{1}{2}$.

法三： 易证得$e^x\ge x+1$，则$g(x)=e^x\cdot x-x-\ln x=e^{x+lnx}-(x+\ln x)\ge$

$x+\ln x+1-(x+\ln x)=1$, 则 $2a\le 1$，故 $a\le \frac{1}{2}$.

四. 解答题

17.【答案】（1）见解析；（2）$b\in(\sqrt{2},\sqrt{3})$

【解析】（1）因为 $a-2c\cos B=c$，由正弦定理得 $\sin A-2\sin C\cos B=\sin C$.

因为 $\sin A-2\sin C\cos B=\sin(B+C)-2\sin C\cos B=\sin(B-C)=\sin C$，

所以 $\sin(B-C)=\sin C$，

（2 分）

则 $B-C=C$ 或 $B-C+C=\pi$，即 $B=2C$ 或 $B=\pi$（舍去），故 $B=2C$.

（4 分）

（2）因为 $\triangle ABC$ 是锐角三角形，所以 $\begin{cases}0<C<\frac{\pi}{2},\\ 0<2C<\frac{\pi}{2},\\ 0<\pi-3C<\frac{\pi}{2},\end{cases}$ 得 $\frac{\pi}{6}<C<\frac{\pi}{4}$.

（6 分）

所以 $\frac{\sqrt{2}}{2}<\cos C<\frac{\sqrt{3}}{2}$. 由正弦定理可得：$\frac{b}{c}=\frac{\sin B}{\sin C}$，则 $b=\frac{\sin B}{\sin C}\cdot c=\frac{\sin 2C}{\sin C}=2\cos C$

（8 分）

所以 $b\in(\sqrt{2},\sqrt{3})$.

（10 分）

18. 【答案】(1) $n=10$；(2) $\frac{16}{21}$

【解析】（1）设 $m=5n(n\in N^{*})$，据题意列出 2×2 列联表如下所示：

	男生	女生	合计

满意	$3n$	$4n$	$7n$
不满意	$2n$	n	$3n$
合计	$5n$	$5n$	$10n$

则 $K^2=\dfrac{10n\times\left(4n\times 2n-3n\times n\right)^2}{5n\times 5n\times 7n\times 3n}=\dfrac{10n}{21}$，则 $\dfrac{10n}{21}\approx 4.762$， $n\in N^*$，

得$n=10$，则 $m=50$，故被调查的男生的人数为 50.

（4 分）

得到2×2列联表如下：

	男生	女生	合计
满意	30	40	70
不满意	20	10	30
合计	50	50	100

（

5 分）

因为$3.841<4.672<6.635$，所以有 95%的把握认为对食堂服务的评价与性别有关.

（7 分）

由分层抽样得抽出的 9 人中，男生 6 人女生 3 人.

（9 分）

再任取 3 人共 C_9^3 种取法，则至少有一名女生的概率为 $P=1-\dfrac{C_6^3}{C_9^3}=\dfrac{16}{21}$.

（12 分）

19. 【答案】(1) $a_n=\dfrac{1}{2^n}$（$n\in N^*$）；(2) 16

【解析】（1）因为 $S_n=1-2a_{n+1}$，所以 $S_{n-1}=1-2a_n(n\geq 2)$

两式相减得 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{1}{2}(n\geq 2)$, 又 $a_2=\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}a_1$

（2 分）

故 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{1}{2}(n\in \mathrm{N}^*)$，所以数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，公比为 $\dfrac{1}{2}$

（3 分）

即 $a_n=\dfrac{1}{2^n}(n\in \mathrm{N}^*)$

（4 分）

（2）因为 $(2n-1)a_n=\dfrac{2n-1}{2^n}$，则 $T_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^n}$，

$$\therefore \frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{5}{2^4}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

（6 分）

两式相减得 $\dfrac{1}{2}T_n=\dfrac{1}{2}+2(\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{2^4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n})-\dfrac{2n-1}{2^{n+1}}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{2n+3}{2^{n+1}}$

所以 $T_n=3-\dfrac{2n+3}{2^n}$

（8 分）

显然 $T_n<3$，且 $T_{n+1}-T_n=\dfrac{2n+1}{2^{n+1}}>0$ 即 $\{T_n\}$ 为递增数列，

（9 分）

$T_1=\dfrac{1}{2}<1, 1<T_2=\dfrac{5}{4}<2, 1<T_3=\dfrac{15}{8}<2, T_4=\dfrac{37}{16}>2$，所以 $\langle T_1\rangle=0, \langle T_2\rangle=\langle T_3\rangle=1, n\geq 4$ 时, $\langle T_n\rangle=2$

所以 $\langle T_1\rangle+\langle T_2\rangle+\cdots+\langle T_{10}\rangle=16$.

（12 分）

20.【答案】(1) 见解析；(2) $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

【解析】(1) **法一：** 取 AB 中点 F，连接 CF、OF，因为 O,F 分别为 AE,AB 的中点，

所以 $OF//BE$，且 $OF=\frac{1}{2}BE$.

（2 分）

又因为 $CD//BE$， $CD=\frac{1}{2}EB$， $OF//BE$，且 $OF=\frac{1}{2}BE$，所以 $OF//CD$，且 $OF=CD$，

所以四边形 $OFCD$ 为平行四边形，所以 $DO//CF$，而 $CF\subset$ 平面 ABC， $DO\not\subset$ 平面 ABC，

所以 $DO//$ 平面 ABC.

（5 分）

法二： 取 EB 中点 G，连接 OG、DG，因为 $DC//GB$，且 $DC=GB$，

所以四边形 $DGBC$ 为平行四边形，则 $DG//CB$，则 $DG//$ 平面 ABC.

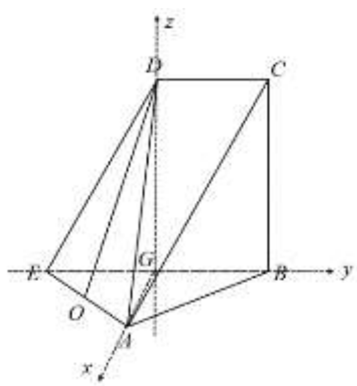
（2 分）

因为 O,G 分别为 EA,EB 的中点，所以 $OG//AB$，则 $OG//$ 平面 ABC，平面 DOG，

所以平面 $DGO//$ 平面 ABC，又因为而 $DO\subset$ 平面 DGO，所以 $DO//$ 平面 ABC.

（5 分）

(2) **法一：**



取 EB 中点 G，连接 AG、DG，因为 $AE=AB=\sqrt{2}$，$BE=2$，所以 ΔABE 为等腰直角三角形，

所以 $AG=1$，又因为 $AD=\sqrt{3}$， $DG=BC=\sqrt{2}$，所以 $AG^2+DG^2=DA^2$，所以 $DG\perp AG$，

又因为 $BE\perp AG$， $BE\cap DG=G$， $BE,DG\subset$ 平面 BCD，所以 $AG\perp$ 平面 BCD.

（8 分）

记 h 为点 D 到平面 ABC 的距离，因为 $V_{D-ABC}=V_{A-BCD}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot h=\frac{1}{3}S_{\Delta BCD}\cdot AG$，

因为 $DG//BC$，所以 $BC \perp AG$，又 $CB \perp BE$， $BE \cap AG = G$， $BE, AG \subset$ 平面 ABE，

所以 $BC \perp$ 平面 ABE，且 $AB \subset$ 平面 ABE，所以 $BC \perp AB$. 则 $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 1$，

$S_{\Delta BCD} = \frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $h = \frac{\sqrt{2}}{2}$，（10 分）

设 DA 与平面 ABC 所成角为 θ，则 $\sin\theta = \frac{h}{AD} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$.（12 分）

法二：由法一证得 $DG \perp$ 平面 ABE，以 G 为原点，以 GA, GB, GD 方向分别为 x 轴，

y 轴，z 轴，建立如图所示空间直角坐标系.

（6 分）

$G(0,0,0)$，$A(1,0,0)$，$D(0,0,\sqrt{2})$，$E(0,-1,0)$，$\overrightarrow{AD} = (-1,0,\sqrt{2})$，

（7 分）

由法一证得 $BC \perp$ 平面 ABE，且 $AE \subset$ 平面 ABE，所以 $BC \perp AE$，

又 $AB \perp AE$， $BC \cap AB = B$， $BC, AB \subset$ 平面 ABC，所以 $AE \perp$ 平面 ABC，

（9 分）

故平面 ABC 的一个法向量为 $\overrightarrow{AE} = (-1,-1,0)$.

（10 分）

设 DA 与平面 ABC 所成角为 θ，所以 $\sin\theta = \left|\cos < \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE} >\right| = \left|\frac{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE}}{\left|\overrightarrow{AD}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AE}\right|}\right| = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

（12 分）

21. 【答案】（1）$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$；（2）$x \pm 2y - 1 = 0$.

【详解】（1）如图，以 FE 所在的直线为 x 轴，FE 的中点 O 为原点建立平面直角坐标系

设 $M(x,y)$ 为椭圆上一点，由题意可知 $|MF| + |ME| = |AE| = 4$, $|FE| = 2 < 4$，

所以 M 点轨迹是以 F, E 为左右焦点，长轴长 $2a = 4$ 的椭圆，

（2 分）

因为 $2c=2,2a=4$，所以 $c=1,a=2$，则 $b^2=a^2-c^2=3$，

所以椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$；

（5 分）

（2）**法二一**：因为 $\overrightarrow{QP}=3\overrightarrow{OQ}$，所以 $\overrightarrow{OP}=4\overrightarrow{OQ}$.

当 AB 斜率为 0 时，Q，O 两点重合，不合题意；

（6 分）

故设直线 AB 的方程为 $x=ty+1$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$Q(x_3,y_3)$，

联立 $\begin{cases} x=ty+1 \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases}$，得 $(3t^2+4)y^2+6ty-9=0$，所以 $y_1+y_2=\frac{-6t}{3t^2+4}$，$y_1y_2=\frac{-9}{3t^2+4}$.，

（7 分）

所以 $y_3=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{-3t}{3t^2+4}$，$x_3=ty_3+1=\frac{4}{3t^2+4}$，

（8 分）

所以 $P(4x_3,4y_3)$，即 $P\left(\frac{16}{3t^2+4},\frac{-12t}{3t^2+4}\right)$，

（9 分）

将 P 代入 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 得 $3t^4-8t^2-16=0$，即 $(t^2-4)(3t^2+4)=0$，解得：$t=\pm2$，

（11 分）

所以直线 AB 的方程为 $x=\pm2y+1$，即 $x\pm2y-1=0$.

（12 分）

法二：因为 $\overrightarrow{QP}=3\overrightarrow{OQ}$，所以 $\overrightarrow{OP}=4\overrightarrow{OQ}$.，

当 AB 斜率不存在时，$\overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{OQ}$，不合题意；

（6 分）

当AB斜率存在时，设直线方程为$y=k\left(x-1\right)$，设点$A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right)$，

则$\begin{cases}\dfrac{x_1^2}{4}+\dfrac{y_1^2}{3}=1\\ \dfrac{x_2^2}{4}+\dfrac{y_2^2}{3}=1\end{cases}$，两式作差得：$\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot\dfrac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=-\dfrac{3}{4}$，即$k_{AB}\cdot k_{OP}=-\dfrac{3}{4}$，

（7 分）

故直线OP的方程为：$y=-\dfrac{3}{4k}x$，联立$\begin{cases}y=-\dfrac{3}{4k}x\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\end{cases}$，解得$x_P^2=\dfrac{16k^2}{3+4k^2}$，

联立$\begin{cases}y=-\dfrac{3}{4k}x\\ y=k(x-1)\end{cases}$，解得$x_Q=\dfrac{4k^2}{3+4k^2}$，因为$\overrightarrow{OP}=4\overrightarrow{OQ}$，所以$x_P=4x_Q$，

（9 分）

即$\dfrac{4|k|}{\sqrt{3+4k^2}}=4\times\dfrac{4k^2}{3+4k^2}$，则$k^2=\dfrac{1}{4}$，解得：$k=\pm\dfrac{1}{2}$，

（11 分）

所以直线AB的方程为$y=\pm\dfrac{1}{2}(x-1)$．即$x\pm 2y-1=0$.

（12 分）

22．【答案】（1）$a=\dfrac{(\mathrm{e}+1)^2}{2}$；（2）(i) 见解析；(ii) $0<a\le 2$.

【解析】(1) $f'\left(x\right)=\dfrac{2}{x}$, 令$f'\left(x\right)=2\mathrm{e}$, 得$x=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$, 所以直线$y=2\mathrm{e}x+m$与函数$y=f(x)$

的图象相切于点$(\dfrac{1}{\mathrm{e}},-2)$. 代入$y=2\mathrm{e}x+m$, 得$m=-4$, 即切线方程为$y=2\mathrm{e}x-4$.

（2 分）

法一: 将切线方程$y=2\mathrm{e}x-4$代入$y=g(x)$中, 得$\dfrac{1}{2}ax^2-(2\mathrm{e}+2)x+4=0$.

令判别式$\Delta=0$, 得$a=\dfrac{(\mathrm{e}+1)^2}{2}$.

（4 分）

法二: 令 $g^{'}(x)=ax-2=2e$，得 $x=\dfrac{2(\mathrm{e}+1)}{a}$，$g(x)=\dfrac{2(\mathrm{e}^2-1)}{a}$，

则直线 $y=2\mathrm{e}x-4$ 与 $g(x)$ 切于点 $(\dfrac{2(\mathrm{e}+1)}{a},\dfrac{2(\mathrm{e}^2-1)}{a})$，

（2 分）

代入可得 $a=\dfrac{(\mathrm{e}+1)^2}{2}$.

（4 分）

(2)(i) $h(x)=2\ln x+\dfrac{1}{2}ax^2-(a+4)x+3.$

则 $h'(x)=\dfrac{2}{x}+ax-(a+4)=\dfrac{ax^2-(a+4)x+2}{x}$.

(5 分)

考虑到 $ax^2-(a+4)x+2=0$ 的判别式 $\Delta=(a+4)^2-8a=a^2+16>0$，以及 $a>0$.

所以 $h'(x)=0$ 有两个不等实根 x_1,x_2 (设 $x_1<x_2$)，且 $x_1+x_2=\dfrac{a+4}{a}>0$，$x_1x_2=\dfrac{2}{a}>0$.

所以当 $x\in(0,x_1),h'(x)>0$；当 $x\in(x_1,x_2),h'(x)<0$；当 $x\in(x_2,+\infty),h'(x)>0$.

即函数 $h(x)$ 有两个极值点 x_1,x_2.

(8 分)

(ii) $h(x_1)+h(x_2)=2(\ln x_1+\ln x_2)+\dfrac{1}{2}a(x_1^2+x_2^2)-(a+4)(x_1+x_2)+6$

$=2\ln\dfrac{2}{a}+\dfrac{a}{2}\left[(\dfrac{a+4}{a})^2-\dfrac{4}{a}\right]-\dfrac{(a+4)^2}{a}+6=2\ln\dfrac{2}{a}-\dfrac{a}{2}-\dfrac{8}{a}\le -a-3$.

即 $2\ln\dfrac{2}{a}+\dfrac{a}{2}-\dfrac{8}{a}+3\le 0$ 恒成立.

(10 分)

记 $\varphi(a)=2\ln\dfrac{2}{a}+\dfrac{a}{2}-\dfrac{8}{a}+3$. 则 $\varphi'(a)=-\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{8}{a^2}=\dfrac{(a-2)^2+12}{2a^2}>0$.

(11 分)

所以$\varphi(a)$在$(0,+\infty)$上递增，又$\varphi(2)=0$，所以$0<a\le 2$.

（12 分）