

2021 年高考试题中的数学文化

范佳清 张维忠 (浙江师范大学教师教育学院 321004)

数学承载着思想和文化,是人类文明的重要组成部分.数学文化是指数学的思想、精神、语言、方法、观点,以及它们的形成和发展;还包括了数学在人类生活、科学技术、社会发展中作出的贡献和意义,以及与数学相关的人文活动.《普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)》强调高考试题要融入与渗透数学文化^[1].《中国高考评价体系》强调高考数学在考查过程中增加自然科学、人文与社会科学等多个领域以及现实生活、数学文化中的材料作为试题背景,考查学生运用数学知识解决实际问题的能力,促进学生数学素养的形成和发展^[2].为此,本文围绕 2021 年高考中的

有关数学文化的试题进行分析讨论,以期的高考数学试题编拟和数学文化教学提供启示与借鉴.

1 试题特征

2021 年全国各地共有 10 套高考数学试卷,包括全国甲卷、全国乙卷的文科卷和理科卷,新高考卷 I,新高考卷 II,北京卷,上海卷,浙江卷,天津卷.其中,有关数学文化的试题共有 17 题(文、理科卷中相同的试题视为一道).

借鉴张维忠等的研究,按照内容类型将高考试题中的数学文化分为数学与人文艺术、数学与科技、数学与生活以及数学史^[3],将呈现形式分为附加型、可分离型、不可分离型^[4].

表 1 2021 年全国高考数学文化试题特征

试卷	题号	题型	背景与名称	内容类型	呈现形式	知识点分布
全国甲卷	2	选择题	农村扶贫	数学与生活	可分离型	概率
	4	选择题	视力问题	数学与生活	可分离型	函数
	8	选择题	地理测量	数学与生活	不可分离型	立体几何
	17	解答题	机床生产	数学与生活	可分离型	概率
全国乙卷	6	选择题	冬奥会	数学与生活	可分离型	概率
	9	选择题	刘徽《海岛算经》	数学史	不可分离型	平面几何
	17	解答题	设备生产	数学与生活	可分离型	概率
新高考卷 I	16	解答题	剪纸艺术	数学与人文艺术	附加型	数列求和
	18	解答题	“一带一路”	数学与人文艺术	附加型	概率
新高考卷 II	4	选择题	北斗三号	数学与科技	不可分离型	立体几何
	21	解答题	生命科学	数学与科技	可分离型	概率
北京卷	6	选择题	党旗规格	数学与生活	可分离型	等差数列
	8	选择题	自制雨量器	数学与生活	不可分离型	立体几何
	18	解答题	核酸检测	数学与生活	可分离型	概率
上海卷	10	填空题	场馆参观	数学与生活	可分离型	概率
	19	解答题	企业营业额	数学与生活	可分离型	数列求和
浙江卷	11	填空题	赵爽弦图	数学史	附加型	平面几何

较大的题目之一,是一道值得“小题大做”的好题.在比较 a 与 c 的大小时,由于二者均为离散性的数,不容易直接依据数值的精确计算(估算)比较它们的大小.因此,不考虑孤立地对两个数值进行大小比较,而想到引入变量把具体数值一般化(即数值 — 字母(参数)化),借助于函数这一强大工具,先将数值 0.01 一般化为变量 x ,再将变量 x 赋值为 0.01(这充分体现了“特殊 — 一般 — 特殊”的思维策略).

需要注意的是,引入“参数”应是广义的,不

仅限于自变量,还可利用不等式的性质分离参数、以变换主元等方式引入参数和构造辅助函数来解决疑难问题.

参考文献

- [1] 佚名.加大开放与应用 克服“机械刷题”——教育部考试中心命题专家评析 2021 年高考数学试题[EB/OL](2021-06-08). http://www.jyb.cn/rmtzgjyb/202106/t20210608_595737.html.

从表 1 可以看出:从内容类型上来说,数学与生活类的试题占了大多数,涉及扶贫、视力问题、生产等公共生活方面的内容,把社会问题融入到学生的学习生活中,引导学生关注民生问题,树立家国意识,彰显立德树人的教育之本.从呈现形式上来说,试题主要通过可分离型进行呈现,说明数学文化类试题仍需要注重与数学知识的关联,避免背景素材强硬地“附加”.

2 试题欣赏与评析

2.1 以数学与人文艺术为背景

例 1 (新高考卷 I 第 16 题) 某校学生在研究民间剪纸艺术时,发现剪纸时经常会沿纸的某条对称轴把纸对折.规格为 $20\text{ dm} \times 12\text{ dm}$ 的长方形纸,对折 1 次共可以得到 $10\text{ dm} \times 12\text{ dm}$, $20\text{ dm} \times 6\text{ dm}$ 两种规格的图形,它们的面积之和 $S_1 = 240\text{ dm}^2$,对折 2 次共可以得到 $5\text{ dm} \times 12\text{ dm}$, $10\text{ dm} \times 6\text{ dm}$, $20\text{ dm} \times 3\text{ dm}$ 三种规格的图形,它们的面积之和 $S_2 = 180\text{ dm}^2$.依此类推,对折 4 次共可以得到不同规格图形的种数为 _____;如果对折 n 次,那么 $\sum_{k=1}^n S_k = \underline{\hspace{2cm}}\text{ dm}^2$.

评析 剪纸是中国最古老的民间艺术形式之一,能给人一种视觉上透空的感觉和艺术享受.剪纸作为一种原始艺术的载体,通过运用夸张变形的手法,将不同空间、时间的物像进行组合.此题以民间剪纸为背景,引入数列问题,为数列问题找到了真实的文化背景和现实意义,体现了数列知识与艺术的相关性及数学的应用价值.考生可以在感受中国传统文化艺术的基础上,抽象出其中的相关数列知识,发现对折后所得不同规格图形的种数呈等差数列,对折后单个规格图形的面积呈等比数列,很容易通过等差、等比数列相乘得到面积和.该题的重点在于对具体文化信息的理解和分析的能力,考查了考生的数学抽象素养.

2.2 以数学与科学技术为背景

例 2 (新高考卷 II 第 21 题) 一种微生物群体可以经过自身繁殖不断生存下来,设一个这种微生物为第 0 代,经过一次繁殖后为第 1 代,再经过一次繁殖后为第 2 代……该微生物每代繁殖的个数是相互独立的且有相同的分布列.设 X 表示 1 个微生物个体繁殖下一代的个数. $P(X = i) = p_i (i = 1, 2, 3)$.

(1) 已知 $p_0 = 0.4, p_1 = 0.3, p_2 = 0.2, p_3 = 0.1$, 求 $E(X)$;

(2) 设 p 表示该种微生物经过多代繁殖后临近灭绝的概率, p 是关于 x 的方程 $p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3 = x$ 的一个最小正实根, 求证: 当 $E(X) \leq 1$ 时, $p = 1$; $E(X) > 1$ 时, $p < 1$;

(3) 根据你的理解说明 (2) 问结论的实际含义.

评析 如今国内外的竞争越来越体现在科技的竞争,生物科学的发展也是科学技术中不可或缺的一部分.数学教育在科技创新和人才培养上的作用也不言而喻.该题以一种微生物的繁殖作为背景,展现了数学在生物科学中的重要地位,考生通过相应的概率求解公式即可解答,难度不大.该题考查了考生的问题理解和分析的能力以及数据分析能力.

2.3 以数学与生活为背景

例 3 (全国甲卷理科第 8 题) 2020 年 12 月 8 日,中国和尼泊尔联合公布珠穆朗玛峰最新高程为 $8\,848.86$ (单位: m), 三角高程测量法是珠穆朗玛峰测量法之一. 图 1 是三角高程测量法的一个示意图, 现有 A, B, C 三点, 且 A, B, C 在同一水平面上的投影 A', B', C' 满足 $\angle A'C'B' = 45^\circ$, $\angle A'B'C' = 60^\circ$, 由点 C 测得点 B 的仰角为 15° , BB' 与 CC' 的差为 100, 由点 B 测得点 A 的仰角为 45° , 则 A, C 两点到水平面 $A'B'C'$ 的高度差 $AA' - CC'$ 约为 $(\sqrt{3} \approx 1.732)$ ().

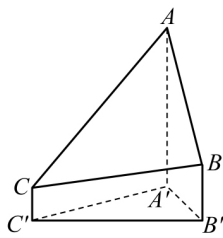


图 1

A. 346 B. 373 C. 446 D. 473

评析 珠穆朗玛峰是世界上海拔最高的山峰,珠穆朗玛峰的高度一直是世界关注的问题.此题以珠穆朗玛峰的高度测量为背景,介绍了三角高程测量法,引入了立体几何问题,展现了数学与地理的紧密联系,体现了数学的应用价值和现实意义.考生可以根据题目中给出的三角高程测量法的示意图,借助线线关系、线面关系等立体几何知识构建计算模型,将题目的自然语言转换为符号语言.题目计算难度不大,重点在于考查考生的数学抽象、数学建模与空间想象能力.

例 4 (全国甲卷文科第 6 题) 青少年视力是社会普遍关注的问题,视力情况可借助视力表测量.通常用五分记录法和小数记录法记录视力数据,五分记录法的数据 L 和小数记录法的数据 V 满足 $L = 5 + \lg V$. 已知某同学视力的五分记录法

数据为 4.9, 则其视力的小数记录法数据约为 $(\sqrt[10]{10} \approx 1.259)$ ().

A. 1.5 B. 1.2 C. 0.8 D. 0.6

评析 此题以社会广泛关注的热点问题作为背景, 介绍了视力的五分记录法和小数记录法, 展现了数学与社会发展的密切联系, 体现了数学的应用价值与现实意义. 该题考查了函数的相关知识, 考生可根据题中给出的函数解析式, 通过代入 L 值再进行化简后即可解答. 该题考查的函数知识难度不大, 但向考生传递了社会热点问题, 体现了数学来源于生活又服务于生活.

2.4 以数学史为背景

例 5 (全国乙卷第 9 题) 魏晋时期刘徽撰写的《海岛算经》是关于测量的数学著作, 其中第一题是测量海岛

的高. 如图 2, 点 E, H, G 在水平线 AC 上, DE 和 FG 是两个垂直

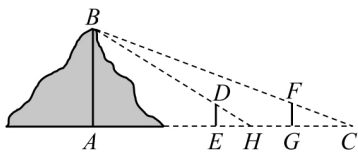


图 2

于水平面而且等高的测量标杆的高度, 称为“表高”, EG 称为“表距”, GC 和 EH 都称为“表目距”, GC 与 EH 的差称为“表目距的差”, 则海岛的高 $AB = ()$.

- A. $\frac{\text{表高} \times \text{表距}}{\text{表目距的差}} + \text{表高}$
 B. $\frac{\text{表高} \times \text{表距}}{\text{表目距的差}} - \text{表高}$
 C. $\frac{\text{表高} \times \text{表距}}{\text{表目距的差}} + \text{表距}$
 D. $\frac{\text{表高} \times \text{表距}}{\text{表目距的差}} - \text{表距}$

评析 《海岛算经》是中国学者编撰的最早的一部测量数学著作, 为地图学提供了数学基础. 该数学史背景强调了中国传统数学文化的价值和现实意义, 让考生感受到了中国古代数学测量的魅力. 考生需要正确理解题干中的“表高”“表距”“表目距”等信息, 结合几何图形解答. 该题主要考查了学生对信息的理解和分析的能力、数学建模能力及数学抽象能力.

3 对命题的建议

3.1 巧妙融入人文艺术与数学史, 传递文化价值, 彰显数学魅力 数学史具备实用性, 能够展示数学发展的历

程, 也包含美学标准、智力好奇、趣味娱乐等等, 可以让师生感受到数学文化的多元性^[5]; 而人文艺术与数学的融合能充分展现数学的审美价值. 根据统计结果可以发现, 试题类型中含有人文艺术和数学史的较少; 为了充分利用数学史、人文艺术的文化价值, 命题者可将它们用历史资料或者图片的形式灵活地呈现出来, 通过结合并借助数学文化中的人文精神来训练学生的思维, 提高信息的理解和分析的能力.

3.2 采用合适的呈现形式, 展现数学应用价值

数学文化情境的呈现形式对于考查学生的核心素养有重要作用. 2021 年全国高考数学文化类试题的呈现形式主要以可分离型为主, 命题者需要增加高考数学试题与实际生活、社会生产的联系, 适当地采用不可分离型的试题, 让学生通过文化理解数学或者用数学解决文化中固有的问题, 展现数学文化的应用价值、科学价值、人文价值和美学价值.

3.3 设计多样化题型, 拓宽数学文化的渗透路径

当前数学文化题型多以选择题和填空题为主, 题型较为单一. 命题者可以结合学生的实际和考试的效度选择丰富的数学文化素材, 设计相应的选择填空题和解答题; 解答题的题干较长、隐含信息较多, 比较注重数学思想方法的灵活运用, 与题干简洁的选择填空题相结合, 信息提取难易均衡分布, 数学文化渗透自然.

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准 (2017 年版 2020 年修订) [M]. 北京: 人民教育出版社, 2020: 10.
- [2] 于涵, 任子朝, 陈昂, 等. 新高考数学科考核目标与考查要求研究 [J]. 课程·教材·教法, 2018, 38(6): 21-26.
- [3] 张维忠, 金月丹. 高考试题中的数学文化内容类型研究——基于近 5 年高考试卷的量化分析 [J]. 中学数学月刊, 2020(6): 26-29, 34.
- [4] 金月丹, 张维忠. 高考试题中数学文化运用水平分析——基于近 5 年高考试题的统计分析 [J]. 中学数学杂志, 2020(5): 48-51.
- [5] 曹文杏, 胡余旺. 高考数学中数学文化类试题特征及其评析——以 2016—2020 年全国 I 卷、II 卷、III 卷为例 [J]. 教育测量与评价, 2021(6): 49-57. <http://www.cnki.net>