河北省2022届高三上学期第二次联考数学试卷

注意事项：

1.答卷前，考生务必将自己的姓名、班级和考号填写在答题卡上。

2.回答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.设集合A＝{x|－3<x≤1}，B＝{x|－5≤x<0}，则A∩B＝

A.[－5，－3)　　B.(－3，0)　　C.(0，1]　　D.[－5，－1]

2.已知α是第四象限角，且sinα＝$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，则tanα＝

A.$\sqrt{2}$　　B.$-\sqrt{2}$　　C.$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　D.$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

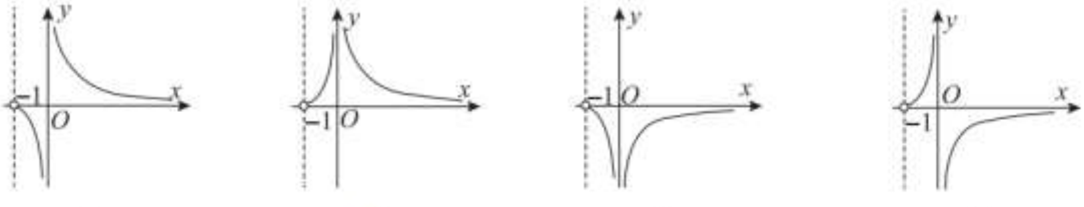
3.在△ABC中，∠A，∠B，∠C的对边分别为a，b，c，∠B＝135°，b＝15，c＝3，则a＝

A.2　　B.6　　C.3　　D.26

4.已知A(－1，4)，B(2，1)，O是坐标原点，点P满足$\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$，且λ＋μ＝2，则点P的轨迹方程为

A.x－y＝1　　B.x－y＝2　　C.x＋y＝3　　D.x＋y＝6

5.函数y＝$\dfrac{1}{\ln x+1}$的大致图象为



A　　B　　C　　D

6.函数f(x)＝cosx·sin(x＋$\dfrac{\pi}{4}$)4的对称轴方程为

A.x＝$\dfrac{1}{2}$kπ＋$\dfrac{\pi}{8}$(k∈Z)　　B.x＝$\dfrac{1}{2}$kπ－$\dfrac{\pi}{8}$(k∈Z)

C.$x=k\pi+\frac{\pi}{8}(k\in Z)$　　　D.$x=k\pi-\frac{\pi}{8}(k\in Z)$

7.函数 $f(x)=ax^2+\ln(\cos x)$的导函数在$[0，\frac{\pi}{2})$上是减函数，则 a 的取值范围是

A.$a\leqslant-\frac{1}{2}$　　B.$a\geqslant-\frac{1}{2}$　　C.$a\leqslant\frac{1}{2}$　　D.$a\geqslant\frac{1}{2}$

8.已知函数 $f(x)=\log_a(a^{2x}+2a^2)-x$ 的导函数是奇函数。若当 $m>\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，关于 x 的不等式 $f(e^x-x)\geqslant f(\ln m-m^2)$有解，则 m 的最小值为

A.1　　B.$\sqrt{2}$　　C.$\sqrt{e}$　　D.e

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9.设 $0<\theta<\pi$，非零向量 $a=(\sin2\theta，\cos\theta)$，$b=(\cos\theta，1)$，则

A.若 $\tan\theta=\frac{1}{2}$，则 a//b　　B.若 $\theta=\frac{3\pi}{4}$，则 $a\perp b$

C.存在 θ，使 $2a=b$　　D.若 a//b，则 $\tan\theta=\frac{1}{2}$

10.下列条件中，其中 p 是 q 的充分不必要条件的是

A.p：$a\geqslant1$，$b\geqslant1$；q：$a+b\geqslant2$

B.p：$\tan\alpha=1$；q：$\alpha=k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in Z)$

C.p：$x>1$；q：$\ln(e^x+1)>1$

D.p：$a^2<1$；q：函数 $f(x)=x^2+(2-a)x-2a$ 在(0，1)上有零点

11.设 $\alpha\in(0，\frac{\pi}{2})$，$\beta\in(\frac{\pi}{2}，\pi)$，若 $\frac{1+\cos\alpha+\sin\alpha}{1-\cos\alpha+\sin\alpha}=\tan\frac{\beta}{2}$，则有

A.$\sin\alpha=\sin\beta$　　B.$\cos\alpha=-\cos\beta$　　C.$\sin\alpha=\cos\beta$　　D.$\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}=1$

12.已知函数 $f(x)=\ln x$，$x_1>x_2>e$，则下列结论正确的是

A.$(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]>0$　　B.$e(f(x_1)-f(x_2))<x_1-x_2$

C.$x_1f(x_2)-x_2f(x_1)>0$　　D.$\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]>f(\frac{x_1+x_2}{2})$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，其中第 16 题第一空 2 分，第二空 3 分。

13.曲线 $y=e^x-e^{-x}$ 在 $x=0$ 处的切线方程为__________。

14.若 a、b 均为单位向量且夹角为 θ，设 $a\perp(a+\mu b)$，若 $\cos2\theta=-\frac{1}{3}$，则 $\mu=$__________。

15.已知 tanα＝m，sin2α＝$\frac{2m}{5}$，则 m＝__________。

16.已知函数 f(x)＝$\begin{cases}2^{x+1}，x \le 0\\ 3-|x-a|，x>0\end{cases}$，函数 g(x)＝$\log_2$(x＋4)，函数 h(x)＝f(x)－g(x)，当 a＝0 时，函数 h(x)的零点有___________个；若 h(x)的零点有 4 个，则 a 的取值范围是__________。

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.(本小题满分 10 分)

已知函数 f(x)＝cos(x＋$\frac{\pi}{2}$)·cos(x＋$\frac{5\pi}{4}$)。

(1)求函数 f(x)的最小正周期及单调增区间；

(2)将函数 f(x)的图象向右平移$\frac{\pi}{4}$个单位，再将横坐标扩大为原来的 2 倍得到 g(x)的图象，求函数 g(x)在[0，π]上的值域。

18.(本小题满分 12 分)

在△ABC 中，a，b，c 分别为∠A，∠B，∠C 的对边，已知 m＝($\sqrt{3}$，1)，n＝(cosC，sinC)，m//n。若$\sqrt{2}$bcosB＋acosC＋ccosA＝0。

(1)求∠A 的大小；

(2)若 a＝2$\sqrt{2}$，求△ABC 的面积。

19.(本小题满分 12 分)

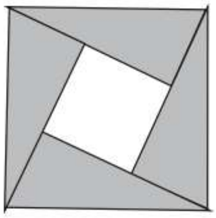
已知函数 f(x)＝$\frac{1}{3}x^3$＋ax^2＋(a^2－1)x＋1，f'(x)是其导函数，且 f(x)在 x＝2 处取得极小值。

(1)求函数 f(x)的极值；

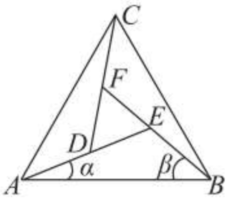
(2)当 x>0 时，求函数 g(x)＝f'(x)＋e^{x-1}＋$\frac{1}{x}$的最小值。

20.(本小题满分 12 分)

图一是东汉末年与三国初期东吴数学家赵爽创造的“赵爽弦图”，它是由四个全等的直角三角形(阴影部分)围成一个大正方形，类比赵爽弦图，三个全等的不等腰三角形构成一个大的正三角形和一个小的正三角形(如图二)。已知△ABC 与△DEF 的面积比为 7：1。



图一



图二

(1)求证：EF＝EB；

(2)求 cos(α－β)的值。

21.(本小题满分 12 分)

在△ABC 中，∠A，∠B，∠C 的对边分别为 a，b，c，b＋c＝k。

(1)若 k＝2acosB，求证：A＝2B；

(2)若 k＝4cosA，求△ABC 面积 S 的最大值。

22.(本小题满分 12 分)

已知 $f(x)=\frac{1}{2}e^{2x}-a^2x$，a>0。

(1)若 f(x)⩾0，求 a 的取值范围；

(2)若 $f(x_1)=f(x_2)$，且 $x_1\neq x_2$，证明：$e^{x_1}+e^{x_2}>2a$。

高三数学参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	D	B	D	A	A	C	A	ABD	AC	ABD	ABC

1.B **解析**:由集合的运算知选 B.

[命题意图] 该试题考查集合及其运算,是高考必考内容,数学素养方面主要考查数学运算以及学生的灵活变形能力.

2.D **解析**:$\because \alpha$ 是第四象限角,$\therefore \cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{\sqrt{6}}{3}$,$\tan\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,故选 D.

[命题意图] 该题主要考查同角三角函数之间的关系以及三角函数在各象限的符号,是最基础的三角函数知识的考查,数学素养主要考查基本方法和基本技能的掌握与灵活变形能力.

3.B **解析**:由余弦定理得 $b^2=a^2+c^2+\sqrt{2}ac$,即 $15=a^2+\sqrt{6}a+3$,解得 $a=\sqrt{6}$.故选 B.

[命题意图] 该题主要考查利用余弦定理建立方程解决求三角形边的问题,是解三角形中比较简单的问题,数学素养方面主要是对基本公式的灵活应用,培养学生灵活处理问题与解决问题的能力.

4.D **解析**:设 $P(x,y)$,$\therefore (x,y)=\lambda(-1,4)+\mu(2,1)$,即 $\begin{cases}x=-\lambda+2\mu,\\ y=4\lambda+\mu,\end{cases}$ $x+y=3(\lambda+\mu)=6$,故选 D.

[命题意图] 该题主要考查向量的坐标运算,方程思想的应用,顺便考查简单消参法.数学素养方面考查知识之间的横向整合,培养学生的发散思维能力与猜想能力.

5.A **解析**:当 $x=1$ 时,$y>0$,排除 C、D.当 $x=-\frac{1}{2}$ 时,$y<0$,排除 B,故选 A.

[命题意图] 该题主要考查函数的图象与性质,特值思想在解题中的应用,也是高考的热点题目.数学素养方面考查了极限思想、数形结合思想,由繁化简思想的应用,对培养学生的抽象思维有促进作用.

6.A **解析**:$f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos^2x=\frac{\sqrt{2}}{4}\sin 2x+\frac{\sqrt{2}}{4}(1+\cos 2x)=\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\sqrt{2}}{4}$,其对称轴满足 $2x+\frac{\pi}{4}=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,即 $x=\frac{1}{2}k\pi+\frac{\pi}{8}(k\in\mathbf{Z})$,故选 A.

[命题意图] 该题主要考查三角函数的图象与性质,两角和与差的三角函数,辅助角公式等,也是高考的热点内容,数学素养方面考查了学生的抽象推理、数形结合、化归等方面.

7.C **解析**:$f'(x)=2ax-\frac{\sin x}{\cos x}$,令 $g(x)=2ax-\frac{\sin x}{\cos x}$,$\therefore g'(x)=2a-\frac{1}{\cos^2x}\leqslant 0$,$2a\leqslant 1$,$a\leqslant\frac{1}{2}$,故选 C.

[命题意图] 该题主要考查求导法则、复合函数求导、函数的单调性以及导数恒成立等问题,也是高考的热点之一.数学素养方面主要是考查学生对问题的灵活处理能力与运算能力.

8.A **解析**:由已知 $f(x)=\log_a(a^{2x}+2a^2)-\log_a a^x=\log_a(a^x+2a^2\cdot a^{-x})$是偶函数,由 $f(-1)=f(1)$,解得 $2a^2=1$,$a=\frac{\sqrt{2}}{2}$,$\therefore f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减.$\because e^x-x\geqslant 1$,$m^2-\ln m>0$,$\therefore$由 $f(e^x-x)\geqslant f(\ln m-m^2)$得 $f(e^x-x)\geqslant f(m^2-\ln m)$,即 $e^x-x\leqslant m^2-\ln m$ 有解,$\therefore m^2-\ln m\geqslant 1$,令 $g(m)=m^2-\ln m$,$g'(m)=\frac{2m^2-1}{m}$,$g(m)$在$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$上单调递增,而 $g(1)=1$,$\therefore m\geqslant 1$,故选 A.

[命题意图] 该题主要考查函数的奇偶性、单调性、对数的运算、导数、不等式有解，其中利用奇偶性求参数的值是高考的热点题目，其中的特值法更是热中之热，而数学素养方面则是考查数学的运算，逻辑思维、知识的迁移能力以及平时常见的导数结论的应用与拓展等.

9. ABD　**解析**：对于A，由 $\tan\theta=\frac{1}{2}$，得 $\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，所以 $\boldsymbol{a}=\left(\frac{4}{5},\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$，$\boldsymbol{b}=\left(\frac{2\sqrt{5}}{5},1\right)$，所以 $\boldsymbol{a}=\frac{2\sqrt{5}}{5}\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，故A正确；对于B，当 $\theta=\frac{3\pi}{4}$ 时，$\boldsymbol{a}=\left(-1,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$\boldsymbol{b}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$，所以 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$；对于C，若 $2\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，则 $\sin\theta=\frac{1}{4}$，$\cos\theta=\frac{1}{2}$，故C不正确；对于D，若 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$，则 $\begin{cases}\sin 2\theta=\lambda\cos\theta,\\ \cos\theta=\lambda,\end{cases}$ 解得 $\cos\theta=0$（舍）或 $\cos\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，则 $\tan\theta=\frac{1}{2}$，故D正确. 故选ABD.

[命题意图] 该题主要考查向量的平行、垂直、数乘运算、三角函数的特例、同角的平方关系等，是比较简单的多方向、多角度的一个综合性题目. 也是高考的常考题目，数学素养方面考查学生对试题对立统一的拆分与综合，抽象思维的特例与延伸等.

10. AC　**解析**：对于A，由 $a\geqslant 1$，$b\geqslant 1$，显然可得 $a+b\geqslant 2$，反之不成立，故A正确；对于B，显然是充要条件，B不正确；对于C，$\because x>1$，$\therefore e^x>e$，$e^x+1>e$，$\ln(e^x+1)>1$，反之不成立，C正确；对于D，当 $a^2<1$ 即 $-1<a<1$ 时，$f(x)=x^2+(2-a)x-2a=(x-a)(x+2)$ 在 $(0,1)$ 上不一定有零点，D不正确. 故选AC.

[命题意图] 该题主要考查充分必要条件，并且区分充分不必要条件、必要不充分条件、充要条件. 该题还包含了不等式、零点、三角函数等. 数学素养方面主要考查充要条件对知识的迁移作用，锻炼学生的发散性思维.

11. ABD　**解析**：注意到由 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 可得 $\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$，$\therefore\frac{1+\cos\alpha+\sin\alpha}{1-\cos\alpha+\sin\alpha}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$，而 $\tan\frac{\beta}{2}=\frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}$，$\therefore\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}=0$，即 $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=0$，$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\pi}{2}$，$\alpha+\beta=\pi$，故选ABD.

[命题意图] 该题主要考查三角函数的同角关系、二倍角公式、诱导公式以及它们的变形应用，还顺便考查了初中数学中的等比定理，该试题综合性非常强，也是高考常考题目. 数学素养方面主要考查学生的逻辑推理能力、知识的迁移能力、运算能力，其中综合能力的培养也符合近几年高考选拔人才的要求.

12. ABC　**解析**：$\because f(x)=\ln x$ 是增函数，$\therefore$A正确；对于B，构造函数 $g(x)=ef(x)-x$，$\therefore g'(x)=\frac{e}{x}-1$，当 $x>e$ 时，$g(x)$ 是减函数，$\therefore g(x_1)<g(x_2)$，B正确；对于C，构造函数 $h(x)=\frac{f(x)}{x}$，$\therefore h'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，当 $x>e$ 时，$h(x)$ 是减函数，$\therefore h(x_1)<h(x_2)$，C正确；对于D，$f(x)$ 是凸函数，D不正确. 故选ABC.

[命题意图] 该题主要考查函数的单调性，凹凸性，以及如何构造函数，该试题也是近几年常考知识点. 数学素养方面主要考查数形结合思想、学生的创造性思维和抽象思维结合形象思维的深层次的交互，对培养学生的创造力有促进作用.

13. $2x-y=0$　**解析**：$y'=e^x+e^{-x}$，$y'|_{x=0}=2$，且当 $x=0$ 时，$y=0$，$\therefore$切线方程为 $y=2x$，即 $2x-y=0$.

[命题意图] 该题主要考查函数的导数、切线问题，历年高考出题频率非常高，大多是以简单题目出现. 数学素养方面主要考查学生对基本知识点的掌握与运算.

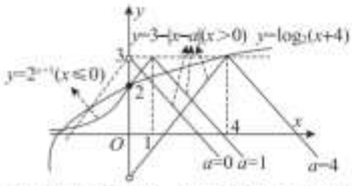
14. $\pm\sqrt{3}$　**解析**：由已知 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})=1+\mu\cos\theta=0$，$\cos\theta=-\frac{1}{\mu}$，$\therefore -\frac{1}{3}=2\cos^2\theta-1=\frac{2}{\mu^2}-1$，$\therefore \mu=\pm\sqrt{3}$.

[命题意图] 该题主要考查向量的内积运算、垂直以及二倍角公式等，是比较简单的题目. 数学素养方面主要考查学生对知识的横向联系的理解与运用，数学中方程与运算会贯穿数学的始终.

15. 0 或 ±2　**解析**：$\because \sin 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{2m}{1+m^2}=\frac{2m}{5}$，解得 $m=0$ 或 $m=\pm2$.

[命题意图] 该题主要考查二倍角公式和同角关系，最主要的是方程的增根与失根问题. 该题虽简单，但有一个失根陷阱. 数学素养方面是考查学生对问题处理的全面性，学会检验，对培养学生养成做题认真仔细的习惯有很大的促进作用.

16. 3；(1，4)　**解析**：画出函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象，如图 $y=2^{x+1}(x\leqslant0)$ 与 $g(x)$ 有两个交点，当 $a<0$ 时，显然不可能有四个交点，当 $a=0$ 时，有三个交点，当 $a\in[0,1]$ 时，有三个交点，当 $a=4$ 时，有三个交点，当 $a>4$ 时，有两个交点. $\therefore$ 当 $a\in(1,4)$ 时，有四个交点.



[命题意图] 该题主要考查动态函数的图象交点问题，其中包含基本初等函数中的指数函数、对数函数、绝对值函数等，这些基本初等函数是高考必考内容. 数学素养方面主要考查数形结合思想，静态与动态转化思想，极限思想等问题.

17. **解**：(1) $f(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos\left(x+\frac{5\pi}{4}\right)=(-\sin x)\cdot\left[-\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]=\sin x\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin^2 x=\frac{\sqrt{2}}{4}\sin 2x-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\sin 2x+\frac{\sqrt{2}}{4}\cos 2x-\frac{\sqrt{2}}{4}$

$=\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\sqrt{2}}{4}$，………………………………………………（2 分）

所以函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{2}=\pi$. ………………………………………………（3 分）

由 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi\Rightarrow-\frac{3\pi}{8}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{8}+k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$，得单调增区间为 $\left[-\frac{3\pi}{8}+k\pi,\frac{\pi}{8}+k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$. ………………………………………………（5 分）

(2) 函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位，得到 $y=\frac{1}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\sqrt{2}}{4}$，再将横坐标扩大为原来的 2 倍得到 $g(x)=\frac{1}{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\sqrt{2}}{4}$，………………………………………………（7 分）

令 $t=x-\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$，$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\in\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]\Rightarrow\frac{1}{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\in\left[-\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{1}{2}\right]\Rightarrow g(x)\in\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}\right]$. ………………………………………………（10 分）

[命题意图] 本题主要考查三角函数的恒等变换，三角函数的图象与性质，图象的平移变换等知识，考查学生的数学运算、逻辑推理等核心素养.

18. **解**：(1) 由 $\boldsymbol{m}/\!/\boldsymbol{n}$ 得 $\sqrt{3}\sin C-\cos C=0$，$\tan C=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$C=30^\circ$. ………………………………（2 分）

由正弦定理得 $\sqrt{2}\sin B\cos B+\sin A\cos C+\sin C\cos A=0$，即 $\sqrt{2}\sin B\cos B+\sin(A+C)=0$，$\cos B=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$B=135^\circ$，………………………………………………（5 分）

$A=15^\circ$. ………………………………………………（6 分）

(2)由题意得 $C=30°$，由正弦定理得 $\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}$，即 $\frac{c}{\sin 30°}=\frac{2\sqrt{2}}{\sin 15°}$，$c=2(\sqrt{3}+1)$，……………（9分）

所以 $S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times 2(\sqrt{3}+1)\times 2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{3}+2$. ……………………………………（12分）

[命题意图] 该题主要考查向量平行的概念、正弦定理、两角和与差的三角函数，是属于三角、向量、解三角形的综合性题目，数学素养方面主要是特殊角的三角函数值的记忆、运算以及从特殊到一般和从一般到特殊的转化.

19. **解**：(1) $f'(x)=x^2+2ax+a^2-1$，$f'(2)=4+4a+a^2-1=0$，$a=-3$ 或 $a=-1$，………………（2分）

当 $a=-3$ 时，$f'(x)=x^2-6x+8$，此时 $x=2$ 是函数的极大值点，故 $a=-1$，……………………（4分）

$f'(x)=x^2-2x=x(x-2)$，$x\in(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in(0,2)$ 时，$f'(x)<0$，则当 $x=0$ 有极大值 1，当 $x=2$ 时有极小值 $-\frac{1}{3}$. ……………………………………………………………（6分）

(2) $g(x)=f'(x)+e^{x-1}+\frac{1}{x}=x^2-2x+e^{x-1}+\frac{1}{x}=(x-1)^2+e^{x-1}+\frac{1}{x}-1$，……………………（7分）

设 $h(x)=e^{x-1}-x$，$h'(x)=e^{x-1}-1$，当 $x=1$ 时，取得最小值 $h(1)=0$，故 $e^{x-1}\geqslant x$，……………（9分）

当 $x=1$ 时取等号，$g(x)=(x-1)^2+e^{x-1}+\frac{1}{x}-1\geqslant(x-1)^2+x+\frac{1}{x}-1\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}-1=1$，当且仅当 $x=1$ 时取等号. ……………………………………………………………………………（11分）

故 $g(x)$ 的最小值为 1. ……………………………………………………………………（12分）

[命题意图] 该题主要考查函数的导数、单调区间、极值以及多个不等式同时取等号的条件，是高考的热点问题，数学素养方面主要考查方程思想，运算思想，以及导数最值和基本不等式最值、二次函数配方取最值同时成立时的条件，对学生多方面、多角度考虑问题有启迪作用，尤其是求导应掌握从简原则，考虑和其他知识结合.

20. **解**：(1)∵$\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 的面积比为 7∶1，∴$AB:EF=\sqrt{7}:1$，………………………………（1分）

设 $EF=m$，$EB=AD=x$，则 $AB=\sqrt{7}m$，$\angle AEB=120°$，……………………………………………（2分）

由余弦定理可得 $AB^2=AE^2+BE^2-2AE\cdot BE\cos\angle AEB$，即 $7m^2=(x+m)^2+x^2+x(x+m)$，
……………………………………………………………………………………………（4分）

$x^2+mx-2m^2=0$，∴$x=m$，………………………………………………………………（5分）

即 $EF=EB$. ……………………………………………………………………………（6分）

(2)由(1)知 $AE=2m$，$BE=m$，由正弦定理得 $\frac{m}{\sin\alpha}=\frac{2m}{\sin\beta}=\frac{\sqrt{7}m}{\sin 120°}$，……………………………（7分）

∴$\sin\alpha=\frac{\sqrt{21}}{14}$，$\sin\beta=\frac{\sqrt{21}}{7}$，$\cos\alpha=\frac{5\sqrt{7}}{14}$，$\cos\beta=\frac{2\sqrt{7}}{7}$，………………………………………（10分）

∴$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{5\sqrt{7}}{14}\times\frac{2\sqrt{7}}{7}+\frac{\sqrt{21}}{14}\times\frac{\sqrt{21}}{7}=\frac{13}{14}$. ………………………（12分）

[命题意图] 该题主要考查中国古代数学文化，正余弦定理、两角和与差的三角函数，是高考必考内容. 数学素养方面主要考查运算思想、方程思想.

21. **解**：(1)由已知 $b+c=2a\cos B$，由正弦定理得：$\sin B+\sin C=2\sin A\cos B$，……………………（2分）

∵$\sin C=\sin(A+B)$，∴$\sin B=2\sin A\cos B-\sin(A+B)=\sin(A-B)$，……………………（4分）

∴$B=A-B$ 或 $B+A-B=\pi$（舍），∴$A=2B$. ……………………………………………（5分）

(2)由 $4\cos A=b+c\geqslant 2\sqrt{bc}$，显然 A 是锐角，………………………………………………（6分）

∴$bc\leqslant 4\cos^2 A$，$S=\frac{1}{2}bc\sin A\leqslant 2\sin A\cos^2 A$，………………………………………………（7分）

令 $f(A)=2\sin A\cos^2 A$，∴$f'(A)=2\cos^3 A-4\sin^2 A\cos A=2\cos A(\cos A+\sqrt{2}\sin A)(\cos A-\sqrt{2}\sin A)$，……………………………………………………………………………………（8分）

由 $f'(A)>0$，解得 $\tan A<\frac{\sqrt{2}}{2}$，令 $\tan A_0=\frac{\sqrt{2}}{2}$，……………………………………………… (10 分)

$\therefore A\in(0,A_0)$ 时，$f'(A)>0$；$A\in\left(A_0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$f'(A)<0$，

$\therefore f(A)$ 在 $A=A_0$ 处取得最大值，此时 $\sin A_0=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\cos A_0=\frac{\sqrt{6}}{3}$，$S\leqslant 2\times\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{9}$. …… (11 分)

故 $\triangle ABC$ 面积 S 的最大值为 $\frac{4\sqrt{3}}{9}$. ……………………………………………… (12 分)

[命题意图] 该题主要考查正弦定理、两角和与差的三角函数、基本不等式、三角函数求导求最值等. 数学素养方面主要考查方程思想、不等式思想和开放思想.

22. **解**：(1) 由已知 $f'(x)=e^{2x}-a^2=(e^x-a)(e^x+a)=0$，$x=\ln a$，……………………………… (2 分)

$\therefore$ 当 $x>\ln a$ 时，$f'(x)>0$；当 $x<\ln a$ 时，$f'(x)<0$. ……………………………… (3 分)

$\therefore f(x)$ 在 $x=\ln a$ 处取得最小值 $f(\ln a)=a^2\left(\frac{1}{2}-\ln a\right)\geqslant 0$，……………………………… (4 分)

$\therefore \ln a\leqslant\frac{1}{2}$，$0<a\leqslant\sqrt{e}$. ……………………………………………… (5 分)

(2) 不妨设 $x_1>x_2$，由已知 $f(x_1)=f(x_2)$ 得 $e^{2x_1}-e^{2x_2}=2a^2(x_1-x_2)$，$\therefore e^{x_1}+e^{x_2}=\frac{2a^2(x_1-x_2)}{e^{x_1}-e^{x_2}}$，

$(e^{x_1}+e^{x_2})^2=2a^2\cdot\frac{e^{x_1}+e^{x_2}}{e^{x_1}-e^{x_2}}(x_1-x_2)=2a^2\cdot\frac{e^{x_1-x_2}+1}{e^{x_1-x_2}-1}(x_1-x_2)$. ……………………… (7 分)

令 $x_1-x_2=t(t>0)$，构造函数 $g(t)=(e^t+1)t-2(e^t-1)$，$\therefore g'(t)=te^t-e^t+1$，……………… (9 分)

再令 $h(t)=te^t-e^t+1$，$\therefore h'(t)=te^t>0$，$\therefore h(t)=g'(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，$g'(t)>g'(0)=0$，

$\therefore g(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，$\therefore g(t)>g(0)=0$，$\therefore(e^t+1)t>2(e^t-1)$，$\frac{(e^t+1)t}{e^t-1}>2$，即 $\frac{e^{x_1-x_2}+1}{e^{x_1-x_2}-1}(x_1-x_2)>2$，……………………………………………… (10 分)

$\therefore(e^{x_1}+e^{x_2})^2>4a^2$，$e^{x_1}+e^{x_2}>2a$. ……………………………………………… (12 分)

[命题意图] 该题主要考查函数的单调性、最值、解不等式、证明不等式等，属于综合性非常强，难度非常高的题目，是高考热点题目，数学素养方面考查了运算思想、换元思想、构造思想和开放思想.