由一道高考题引发的对证明数列不等式的思考

刘海涛　(安徽省芜湖市第一中学　241000)

以函数为背景的数列不等式问题常出现在高考和各类模拟考的解答题中，综合性强、难度大，成为学生丢分的“重灾区”.这类问题常见的解法有构造函数法、数学归纳法、放缩法等，其中最常见的为放缩法.本文例析如何用比较通项的方法，即将数列不等式转化为两个不同数列通项之间的大小比较，来证明数列不等式.

1　真题呈现与解析

(2020年全国卷II理科第21题)已知函数$f(x)=\sin^2 x\sin 2x$.

(1)讨论$f(x)$在区间$(0,\pi)$上的单调性；

(2)证明：$|f(x)|\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{8}$；

(3)设$n\in\mathbf{N}^*$，证明：$\sin^2 x\sin^2 2x\sin^2 4x\cdot\cdots\cdot\sin^2 2^n x\leqslant\frac{3^n}{4^n}$.

分析　只考虑第(3)问，结合函数解析式，将待证式变形为$|\sin^3 x\sin^3 2x\cdot\cdots\cdot\sin^3 2^n x|\leqslant\left(\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)^n$，即证$|\sin x||\sin^2 x\sin 2x|\cdot\cdots\cdot|\sin^2 2^{n-1}x\sin 2^n x||\sin^2 2^n x|\leqslant\left(\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)^n$.又$|\sin x|\leqslant 1$，$|\sin^2 2^n x|\leqslant 1$，则只需证$|f(x)||f(2x)|\cdot\cdots\cdot|f(2^{n-1}x)|\leqslant\left(\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)^n$.这是一个典型的数列不等式证明问题，不等式两侧分别视作函数列$\{|f(2^{n-1}x)|\}$与常数列$\left\{\frac{3\sqrt{3}}{8}\right\}$的前$n$项积，问题可以转化为比较两数列通项的大小.

解析　(1)(2)略.

(3)由第(2)问知$|f(x)|\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{8}$，由$x$的任意性知$|f(2^{n-1}x)|\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{8}(n\in\mathbf{N}^*)$恒成立.记数列$\{|f(2^{n-1}x)|\}$的前$n$项积为$A_n$，则$A_n\leqslant\left(\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)^n$.由$(\sin^2 x\sin^2 2x\sin^2 4x\cdot\cdots\cdot\sin^2 2^n x)^{\frac{3}{2}}=|\sin^3 x\sin^3 2x\cdot\cdots\cdot\sin^3 2^n x|=|\sin x|\cdot|\sin^2 x\sin 2x\cdot\cdots\cdot\sin^2 2^{n-1}x\sin 2^n x|\cdot|\sin^2 2^n x|=|\sin x|\cdot|f(x)f(2x)\cdot\cdots\cdot f(2^{n-1}x)|\cdot|\sin^2 2^n x|\leqslant A_n\leqslant\left(\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)^n$，得$\sin^2 x\sin^2 2x\sin^2 4x\cdot\cdots\cdot\sin^2 2^n x\leqslant\frac{3^n}{4^n}$.

2　问题的提出

已知数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的前n项和分别记作S_n，T_n，前n项积分别记作A_n，B_n.一般地，我们将型如“$S_n>(\geqslant)T_n$”“$A_n>(\geqslant)B_n$”的不等式分别称为数列和不等式、数列积不等式.

3　问题的解决策略

我们容易得到如下两个命题：

命题1　若$a_n>(\geqslant)b_n$，则$S_n>(\geqslant)T_n$；

命题2　若$a_n>(\geqslant)b_n>0$，则$A_n>(\geqslant)B_n$.

由此，若不等式两侧有一侧为不可求和(积)数列的和式(积式)时：(1)若求证数列和不等式“$S_n>(\geqslant)T_n$”，只需求证$a_n>(\geqslant)b_n$；(2)若求证数列积不等式“$A_n>(\geqslant)B_n$”，只需求证$a_n>(\geqslant)b_n>0$.我们将这种通过比较两个数列通项大小来证明数列不等式的方法叫做“比较通项”法.

4　例析数列不等式的证明

· 型如“$S_n>(\geqslant)T_n$”的数列和不等式

例1　已知$n\in\mathbf{N}^*$，求证：$\ln(n+1)<\frac{3}{4}+\frac{5}{12}+\cdots+\frac{2n+1}{2n^2+2n}$.

分析　不等号右侧是以$b_n=\frac{2n+1}{2n^2+2n}$为通项的数列$\{b_n\}$的前n项和T_n，左侧视作数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=\ln(n+1)$，求出通项a_n，问题转化为求证$a_n<b_n$即可.

证明　设数列$\{b_n\}$的通项$b_n=\frac{2n+1}{2n^2+2n}$且前n项和为T_n，数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=\ln(n+1)$，则$n\geqslant 2$时$a_n=S_n-S_{n-1}=\ln\frac{n+1}{n}$，又$a_1=S_1=\ln 2$，所以$a_n=\ln\frac{n+1}{n}$.构造函数$f(x)=\ln x-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)$，求导得$f'(x)=$

$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-1\right)^2 \leqslant 0$,则函数 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上递减,于是有 $f\left(\frac{n+1}{n}\right)<f(1)=0$,即 $\ln\frac{n+1}{n}<\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}-\frac{n}{n+1}\right)=\frac{2n+1}{2n^2+2n}$,所以 $a_n<b_n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$,故 $S_n<T_n$,即 $\ln(n+1)<\frac{3}{4}+\frac{5}{12}+\cdots+\frac{2n+1}{2n^2+2n}$.

例 **2** 已知 $n\in\mathbf{N}^*$,求证:$\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}}<\mathrm{e}$.

分析 将 $\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}}<\mathrm{e}$ 两侧取自然对数,得 $\ln(n+1)-\frac{1}{n}\ln(n!)<1$,即 $n\ln(n+1)<\ln(n!)+n$.左侧视作数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=n\ln(n+1)$,右侧视作数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $T_n=\ln(n!)+n$,求出通项 a_n 和 b_n,问题转化为求证 $a_n<b_n$ 即可.

证明 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=n\ln(n+1)$,数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $T_n=\ln(n!)+n$,则数列通项 $a_n=n\ln(n+1)-(n-1)\ln n$,$b_n=\ln n+1$.欲证 $a_n<b_n$,需证 $n\ln(n+1)-(n-1)\ln n<\ln n+1$,即证 $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$.构造函数 $f(x)=\ln(1+x)-x$,求导得 $f'(x)=\frac{1}{1+x}-1$,易知函数 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上递减,故 $f\left(\frac{1}{n}\right)<f(0)=0$,即 $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$,得证.

• 型如“$A_n>(\geqslant)B_n$”的数列积不等式

例 **3** 已知 $n\in\mathbf{N}^*$,求证:$\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1+\frac{1}{3^n}\right)<\sqrt{\mathrm{e}}$.

分析 1 不等号左侧视作通项为 $a_n=1+\frac{1}{3^n}$ 的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项积 A_n,这里根据切线不等式 $1+x\leqslant\mathrm{e}^x$(当且仅当 $x=0$ 时取等号),得到放缩式 $1+\frac{1}{3^n}<\mathrm{e}^{\frac{1}{3^n}}$.记通项为 $b_n=\mathrm{e}^{\frac{1}{3^n}}$ 的数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项积为 B_n,再证明 $B_n<\sqrt{\mathrm{e}}$.

证明 设通项为 $a_n=1+\frac{1}{3^n}$ 的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项积为 A_n,通项为 $b_n=\mathrm{e}^{\frac{1}{3^n}}$ 的数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项积为 B_n,则 $B_n=\mathrm{e}^{\frac{1}{3^1}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}<\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$.设 $f(x)=\mathrm{e}^x-x-1$,求导得 $f'(x)=\mathrm{e}^x-1$,易得 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增,故 $f\left(\frac{1}{3^n}\right)>f(0)=0$,即 $\mathrm{e}^{\frac{1}{3^n}}>1+\frac{1}{3^n}$,所以 $a_n<b_n$,故 $A_n<B_n<\sqrt{\mathrm{e}}$,即 $\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1+\frac{1}{3^n}\right)<\sqrt{\mathrm{e}}$.

分析 2 将不等式两侧取自然对数,得 $\ln\left(1+\frac{1}{3}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{3^n}\right)<\frac{1}{2}$,不等号左侧视作通项为 $a_n=\ln\left(1+\frac{1}{3^n}\right)$ 的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n,由切线不等式 $\ln(x+1)\leqslant x$(当且仅当 $x=0$ 时取等号),得到放缩不等式 $\ln\left(1+\frac{1}{3^n}\right)<\frac{1}{3^n}$,记通项为 $b_n=\frac{1}{3^n}$ 的数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n,再证明 $T_n<\frac{1}{2}$.

证明 设通项为 $a_n=\ln\left(1+\frac{1}{3^n}\right)$ 的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n,通项为 $b_n=\frac{1}{3^n}$ 的数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n,则 $T_n=\frac{1}{3^1}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)<\frac{1}{2}$.设 $f(x)=\ln(x+1)-x$,求导得 $f'(x)=\frac{-x}{x+1}$,易得 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递减,故 $f\left(\frac{1}{3^n}\right)<f(0)=0$,即 $\ln\left(1+\frac{1}{3^n}\right)<\frac{1}{3^n}$,所以 $a_n<b_n$,则 $\ln\left(1+\frac{1}{3}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{3^n}\right)<T_n<\frac{1}{2}$,即 $\ln\left[\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1+\frac{1}{3^n}\right)\right]<\frac{1}{2}$.从而 $\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1+\frac{1}{3^n}\right)<\sqrt{\mathrm{e}}$.

5 总结反思

本文介绍的“比较通项”法,实质为一种化整为零、化难为易的方法,即将数列和(积)的放缩转化为数列通项的放缩.学生在学习的过程中只要抓住这一本质,问题便可迎刃而解.另外,每一种解法都有其局限性,我们在学习过程中,要结合具体问题及自身掌握情况,选择最佳解题方法,不可一味追求某一种解法,更要善于从不同解法中汲取不同的数学思想,发展自身的数学核心素养.