高 三 一 轮 检 测

数学试题参考答案及评分标准

2021.03

一、单项选择题:

题　号	1	2	3	4	5	6	7	8
答　案	C	A	D	C	A	B	D	A

二、多项选择题:

题　号	9	10	11	12
答　案	BD	ABD	BD	ACD

三、填空题:

13. $\frac{9}{5}$　　14. 65.5　　15. $-\frac{7}{4}$　　16. $(1,\sqrt{2}\,]$

四、解答题:

17.(10分)

解:设等差数列$\{a_n\}$的公差为$d(d>0)$,则

$$3a_1+\frac{3\times 2}{2}d=5d$$

$\therefore\ 3a_1=2d$ ………………………………………………………… 2分

方案一:选条件①

(1)由$\begin{cases}3a_1=2d\\ a_8=2a_4+1\end{cases}$　解得$a_1=2,\ d=3$

$\therefore a_n=2+3(n-1)=3n-1, n\in N^*$ ………………………………………… 4分

(2)$S_n=2n+\frac{n(n-1)}{2}3=\frac{3}{2}n^2+\frac{n}{2}$

$\therefore\ S_n+n=\frac{3}{2}(n^2+n)=\frac{3n(n+1)}{2}$

$\therefore\ \frac{1}{S_n+n}=\frac{2}{3}\ \frac{1}{n(n+1)}=\frac{2}{3}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$ ……………………………… 6分

$\therefore T_n=\frac{2}{3}(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$

$=\frac{2}{3}(1-\frac{1}{n+1})$

$=\frac{2n}{3n+3}$ ………………………………………………………… 8分

又$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{3n-1}{3n+2}$

$\therefore \dfrac{a_n}{a_{n+1}}-T_n=\dfrac{3n-1}{3n+2}-\dfrac{2n}{3n+3}=\dfrac{3n^2+2n-3}{(3n+2)(3n+3)}$

$\because n\in N^*$

$\therefore 3n^2+2n-3\geqslant 3+2-3=2>0$

$\therefore \dfrac{a_n}{a_{n+1}}-T_n>0$

$\therefore \dfrac{a_n}{a_{n+1}}>T_n$ ………………………………………………………………… 10分

方案二:选条件②

由$\begin{cases}3a_1=2d\\a_1a_3=16\end{cases}$ 解得 $a_1=2,\ d=3$

$\therefore a_n=2+3(n-1)=3n-1,n\in N^*$ ………………………………………………… 4分

(2)同方案一(2)

方案三:选条件③

由$\begin{cases}3a_1=2d\\S_5=4a_1a_2\end{cases}$ 解得 $a_1=2,\ d=3$

$\therefore a_n=2+3(n-1)=3n-1,n\in N^*$ ………………………………………………… 4分

(2)同方案一(2)

18.(12分)

解:(1)$f(x)=\sin x(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\dfrac{1}{2}\sin x)+\cos^2 x$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x\cos x-\dfrac{1}{2}\sin^2 x+\cos^2 x$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\sin 2x-\dfrac{1-\cos 2x}{4}+\dfrac{1+\cos 2x}{2}$ ………………………………… 2分

$=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\sin 2x+\dfrac{3}{4}\cos 2x+\dfrac{1}{4}$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})+\dfrac{1}{4}$ ………………………………………………… 4分

$\because x\in[0,\dfrac{\pi}{4}]$

$\therefore \dfrac{\pi}{3}\leqslant 2x+\dfrac{\pi}{3}\leqslant\dfrac{5\pi}{6}$

$\therefore \dfrac{1}{2}\leqslant\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})\leqslant 1$

$\therefore$ 当$x\in[0,\dfrac{\pi}{4}]$时,$f(x)_{\min}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{4}$,$f(x)_{\max}=\dfrac{2\sqrt{3}+1}{4}$. ……………… 6分

(2) $f(\frac{A}{2})=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(A+\frac{\pi}{3})+\frac{1}{4}=1$

$\therefore \sin(A+\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\because A\in(0,\pi)$

$\therefore A+\frac{\pi}{3}\in(\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3})$

$\therefore A=\frac{\pi}{3}$ ………………………………………………………………… 8分

$\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{4}bc=\sqrt{3}$

$\therefore bc=4$

又 $a=2\sqrt{3}$

$\therefore \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$=\frac{b^2+c^2-12}{8}$

$=\frac{(b+c)^2-20}{8}$

$=\frac{1}{2}$ ………………………………………………………………… 10分

$\therefore (b+c)^2=24$

$\therefore b+c=2\sqrt{6}$

又 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=4$

$\therefore \sin B+\sin C=\frac{1}{4}(b+c)=\frac{\sqrt{6}}{2}$. ………………………………………… 12分

19. (12分)

(1)证明：$\because PA\perp$ 平面 $ABCD$，$CD\subset$ 平面 $ABCD$

$\therefore PA\perp CD$

$\because$ 四边形ABCD为矩形

$\therefore AD\perp CD$

又 $AD\cap PA=A$，$AD,PA\subset$ 平面 PAD

$\therefore CD\perp$ 平面 PAD ………………………………………………………… 3分

$\because AE\subset$ 平面 PAD

$\therefore CD\perp AE$

在 ΔPAD 中，$PA=AD=1$，E 为 PD 中点

$\therefore AE\perp PD$

又$PD \cap CD = D$, $PD, CD \subset$ 平面PCD

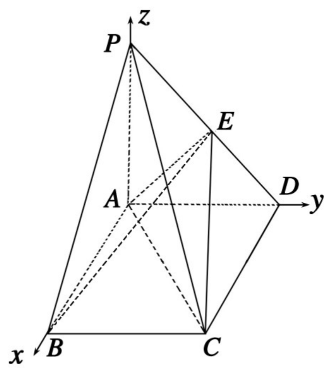
$\therefore AE \perp$ 平面PCD ………………………………………………………… 6分

(2)以A为原点,AB,AD,AP所在直线分别为x轴,y轴,z轴,建立如图所示的空间直角坐标系.

设$AP=a(a>0)$,则$C(2,1,0)$,$P(0,0,a)$,$E(0,\frac{1}{2},\frac{a}{2})$

$\therefore \overrightarrow{AC}=(2,1,0)$, $\overrightarrow{AE}=(0,\frac{1}{2},\frac{a}{2})$, $\overrightarrow{PC}=(2,1,-a)$ ……………………………… 8分

设平面ACE的一个法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则



$$\begin{cases}\overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{n}=0\\ \overrightarrow{AE}\cdot\boldsymbol{n}=0\end{cases}$$

$$\therefore\begin{cases}2x+y=0\\ \frac{1}{2}y+\frac{a}{2}z=0\end{cases}$$

令$y=-a$,解得$\begin{cases}x=\frac{a}{2}\\ z=1\end{cases}$

$\therefore \boldsymbol{n}=(\frac{a}{2},-a,1)$ ………………………………………………………… 10分

设直线PC与平面ACE所成角为θ,则

$$\sin\theta=\left|\cos<\boldsymbol{n},\overrightarrow{PC}>\right|=\frac{\left|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC}\right|}{|\boldsymbol{n}|\left|\overrightarrow{PC}\right|}$$

$$=\frac{a}{\sqrt{\frac{5}{4}a^2+1}\sqrt{5+a^2}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{29+\frac{20}{a^2}+5a^2}}\leqslant\frac{2}{7}$$

当且仅当$a=\sqrt{2}$时,等号成立

$\therefore$ 三棱锥$E-ABC$的体积 $V_{E-ABC}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times1\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{6}$ …………… 12分

20.(12分)

解:(1)运动时间在[40,50)的人数为$3000\times0.02\times10=600$人.

运动时间在[80,90)的人数为$3000\times0.01\times10=300$人.

按照分层抽样共抽取9人,则在[40,50)上抽取的人数为6人,

在[80,90)上抽取的人数为3人.

$\therefore$ 随机变量X的所有可能取值为0,1,2,3.……………………………… 2分

$P(X=0)=\dfrac{C_6^0C_3^3}{C_9^3}=\dfrac{1}{84}$

$P(X=1)=\dfrac{C_6^1C_3^2}{C_9^3}=\dfrac{3}{14}$

$P(X=2)=\dfrac{C_6^2C_3^1}{C_9^3}=\dfrac{15}{28}$

$P(X=3)=\dfrac{C_6^3C_3^0}{C_9^3}=\dfrac{5}{21}$ ……………………………… 4分

所以随机变量X的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\dfrac{1}{84}$	$\dfrac{3}{14}$	$\dfrac{15}{28}$	$\dfrac{5}{21}$

$\therefore E(X)=0\times\dfrac{1}{84}+1\times\dfrac{3}{14}+2\times\dfrac{15}{28}+3\times\dfrac{5}{21}=2$ ……………………………… 6分

(2)$\mu=\bar{t}=35\times0.1+45\times0.2+55\times0.3+65\times0.15+75\times0.15+85\times0.1$

$=58.5$

$\sigma=14.6$ ……………………………… 8分

$\therefore 43.9=58.5-14.6=\mu-\sigma, 87.7=58.5+14.6\times2=\mu+2\sigma$

$\therefore P(43.9<t\leqslant87.7)=\mathrm{P}(\mu-\sigma<t\leqslant\mu+2\sigma)=\dfrac{0.6826+0.9544}{2}=0.8185$ …… 10分

$\therefore P(t\leqslant\mu-\sigma$或$t>\mu+2\sigma)=1-0.8185=0.1815$

$\therefore Y\sim B(12,0.1815)$

$\therefore P(Y=3)=C_{12}^3\times0.1815^3\times0.8185^9$

$=220\times0.0060\times0.1649\approx0.218$ ……………………………… 12分

21.(12分)

解:(1)由题意知,$b=\sqrt{2}$

又$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{a^2-2}}{a}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ ……………………………… 2分

$\therefore a^2=6$

$\therefore$ 椭圆C的方程为$\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{2}=1$ ……………………………… 4分

(2)设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$

当直线AB的斜率存在时,设直线AB的方程为$y=kx+m$,

由$\begin{cases} y = kx + m \\ \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{y^2}{2} = 1 \end{cases}$ 得$(3k^2+1)x^2+6kmx+3m^2-6=0$ ………………………………………… 6分

$\therefore x_1 + x_2 = \dfrac{-6km}{3k^2+1}, x_1 x_2 = \dfrac{3m^2-6}{3k^2+1}$

$y_1 y_2 = (kx_1 + m)(kx_2 + m)$

$= k^2 x_1 x_2 + km(x_1 + x_2) + m^2$ ………………………………………………………… 8分

$\because$ 以线段AB为直径的圆过坐标原点O

$\therefore \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = x_1 x_2 + y_1 y_2$

$= (1 + k^2) x_1 x_2 + km(x_1 + x_2) + m^2$

$= (1 + k^2) \dfrac{3m^2 - 6}{3k^2 + 1} - \dfrac{6k^2 m^2}{3k^2 + 1} + m^2$

$= \dfrac{4m^2 - 6 - 6k^2}{3k^2 + 1} = 0$

$\therefore 2m^2 = 3(1 + k^2)$，且$\Delta = 6(12k^2 - 2m^2 + 4) = 6(9k^2 + 1) > 0$

$\therefore$ 坐标原点O到直线AB的距离

$d = \dfrac{|m|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \dfrac{|m|}{\sqrt{\dfrac{2}{3} m^2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ ……………………………………………………… 10分

当直线AB的斜率不存在时，由题知，$|x_1| = |y_1|$

$\therefore \dfrac{x_1^2}{6} + \dfrac{x_1^2}{2} = 1$

$\therefore x_1^2 = \dfrac{3}{2}$

$\therefore$ 坐标原点O到直线AB的距离$d = |x_1| = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$

综上所述，存在以O为圆心的定圆恒与直线AB相切，定圆的方程为$x^2 + y^2 = \dfrac{3}{2}$ … 12分

22.（12分）

解：函数$f(x)$的定义域为$(0, +\infty)$.

(1) $f'(x) = \ln x - x + 2a$

令$h(x) = \ln x - x + 2a$，则

$h'(x) = \dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{1-x}{x}$

当$x \in (0,1)$时，$h'(x) > 0$，$h(x)$单调递增；

当$x \in (1, +\infty)$时，$h'(x) < 0$，$h(x)$单调递减

$\therefore h(x)_{\max} = h(1) = 2a - 1$ ……………………………………………………………… 2分

当$a \leqslant \dfrac{1}{2}$时，$h(1) = 2a - 1 \leqslant 0$，

$\therefore f'(x)\leqslant 0$

$\therefore f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减,此时,$f(x)$无极值点;

当$a>\dfrac{1}{2}$时,$h(1)=2a-1>0$

$\because 0<e^{-2a}<1, h(e^{-2a})=-2a-e^{-2a}+2a=-e^{-2a}<0$

$\therefore h(x)$在$(0,1)$上有且只有一个零点.

$\therefore f(x)$在$(0,1)$上有且只有一个极值点. …………………………………………… 4分

又$e^{5a}>e^2>1, h(e^{5a})=5a-e^{5a}+2a<7a-e^{4a}a=a(7-e^{4a})<a(7-e^2)<0$

$\therefore h(x)$在$(1,+\infty)$上有且只有一个零点.

$\therefore f(x)$在$(1,+\infty)$上有且只有一个极值点.

综上所述,当$a\leqslant\dfrac{1}{2}$时,$f(x)$无极值点;

当$a>\dfrac{1}{2}$时,$f(x)$有2个极值点.…………………………………………………………… 6分

(2)$g(x)=\dfrac{e^x}{x}-\ln x+x-2a$,则

$g'(x)=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}-\dfrac{1}{x}+1=\dfrac{(x-1)(e^x+x)}{x^2}$

当$x\in(0,1)$时,$g'(x)<0$,$g(x)$单调递减.

当$x\in(1,+\infty)$时,$g'(x)>0$,$g(x)$单调递增.

$\therefore g(x)_{\min}=g(1)=e+1-2a$

$\because$ 函数$g(x)$有两个不同零点x_1,x_2,且$x_1<x_2$

$\therefore g(1)<0$ 即$e+1-2a<0$

$\therefore 2a>e+1$ …………………………………………………………………………………… 8分

又$g(2a)=\dfrac{e^{2a}}{2a}-\ln 2a+2a-2a=\dfrac{e^{2a}}{2a}-\ln 2a$

令$\varphi(x)=\dfrac{e^x}{x}-\ln x(x\geqslant e)$,则$\varphi'(x)=\dfrac{e^x(x-1)-x}{x^2}$

令$m(x)=e^x(x-1)-x(x\geqslant e)$, 则$m'(x)=xe^x-1\geqslant e^{e+1}-1>0$

$\therefore m(x)$单调递增

$\therefore m(x)\geqslant m(e)=e^e(e-1)-e>0$

$\therefore \varphi'(x)>0$

$\therefore \varphi(x)$单调递增.

$\therefore \varphi(2a)>\varphi(e+1)>\varphi(e)=e^{e-1}-1>0$

$\therefore g(2a)>0$,

$\therefore x_2<2a$ …………………………………………………………………………………… 10分

令$n(x)=\ln x-x+1(x>0)$,则$n'(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}$

当$x\in(0,1)$时,$n'(x)>0$,$n(x)$单调递增,

当$x\in(1,+\infty)$时,$n'(x)<0$,$n(x)$单调递减

$\therefore\ n(x)_{\max}=n(1)=0$

$\therefore\ n(x)\leqslant 0$即$\ln x\leqslant x-1$

$\therefore\ g\left(\frac{1}{2a-1}\right)=\frac{e^{\frac{1}{2a-1}}}{\frac{1}{2a-1}}-\ln\left(\frac{1}{2a-1}\right)+\frac{1}{2a-1}-2a\geqslant\frac{e^{\frac{1}{2a-1}}}{\frac{1}{2a-1}}+1-2a$

令$p=\frac{1}{2a-1}\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$,则$g(p)>\frac{e^{p}}{p}-\frac{1}{p}>0$,

$\therefore\ x_1>\frac{1}{2a-1}$

$\therefore\ x_2-x_1<2a-\frac{1}{2a-1}=\frac{4a^2-2a-1}{2a-1}$. …………………………………… 12分