2021届高考数学模拟预热卷（新高考）（二）

【满分：150 分】

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.设集合 $A=\{0,m-2,m^2\},B=\{x\in \mathrm{Z}\,|\,1<x<5\}$,若 $A\cap B=\{4\}$,则实数 m 构成的集合是(　　)

A. $\{2,6\}$　　B. $\{-2,6\}$　　C. $\{-2,2\}$　　D. $\{-2,2,6\}$

2.设 i 是虚数单位，复数 $\dfrac{1+a\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$ 为纯虚数，则实数 a 为(　　)

A．2　　B． -2　　C． $-\dfrac{1}{2}$　　D． $\dfrac{1}{2}$

3.为了落实中央提出的精准扶贫政策，永济市人力资源和社会保障局派 3 人到开张镇石桥村包扶 5 户贫困户，要求每户都有且只有 1 人包扶，每人至少包扶 1 户，则不同的包扶方案种数为（　　）

A.30　　B.90　　C.150　　D.210

4.$\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c 。若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\dfrac{a^2+b^2-c^2}{4}$,则 $C=$(　　)。

A. $\dfrac{\pi}{2}$　　B. $\dfrac{\pi}{3}$　　C. $\dfrac{\pi}{4}$　　D. $\dfrac{\pi}{6}$

5.演讲比赛共有 9 位评委分别给出某选手的原始评分,评定该选手的成绩时,从 9 个原始评分中去掉 1 个最高分、1 个最低分,得到 7 个有效评分.7 个有效评分与 9 个原始评分相比,不变的数字特征是(　　)

A.中位数　　B.平均数　　C.方差　　D.极差

6.某种计算机病毒是通过电子邮件进行传播的,下表是某公司前 5 天监测到的数据:

第 x 天	1	2	3	4	5
被感染的计算机数量 y/台	10	20	39	81	160

则下列函数模型中,能较好地反映计算机在第 x 天被感染的数量 y 与 x 之间的关系的是(　　)

A. $y=10x$　　B. $y=5x^2-5x+10$

C. $y=10\log_2 x+10$　　D. $y=5\times 2^x$

7.在平行四边形 $ABCD$ 中，AC 与 BD 交于点 O，E 是线段 OD 的中点，AE 的延长线与 CD 交于点 F，若 $\overrightarrow{AC}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BD}=\vec{b}$，则 $\overrightarrow{AF}=$（　　）

A． $\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$　　B． $\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$　　C． $\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$　　D． $\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$

8.函数 $y=f\left(x\right)$是 R 上的奇函数，满足 $f(3+x)=f(3-x)$ 当 $x\in(0,3)$ 时， $f(x)=2^{x}$，则 $f(-5)=($　　$)$

A.2　　B. -2　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{1}{2}$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 3 分，有选错的得 0 分.

9.已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$的左、右焦点分别为 F_1,F_2,P 为双曲线上一点，且 $\left|PF_1\right|=2\left|PF_2\right|$，若 $\sin\angle F_1PF_2=\frac{\sqrt{15}}{4}$，则对双曲线中 a,b,c,e 的有关结论正确的是(　　)

A． $\mathrm{e}=\sqrt{6}$　　B． $\mathrm{e}=2$　　C． $b=\sqrt{5}a$　　D． $b=\sqrt{3}a$

10.已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 a_n 是 S_n 与 $\lambda(\lambda\neq0)$ 的等差中项，则下列结论中正确的是(　　)

A.当且仅当 $\lambda=2$ 时，数列 $\{a_n\}$ 是等比数列　　B.数列 $\{a_n\}$ 一定是单调递增数列

C.数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是单调数列　　D. $a_na_{n+2}>0$

11.已知函数 $f\left(x\right)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,导函数为 $f'(x),xf'(x)-f(x)=x\ln x$,且 $f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=\frac{1}{\mathrm{e}}$,则(　　)

A. $f'\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=0$　　B. $f\left(x\right)$ 在 $x=\frac{1}{\mathrm{e}}$ 处取得极大值

C. $0<f\left(1\right)<1$　　D. $f\left(x\right)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增

12.某学校共有 6 个学生餐厅,甲、乙、丙、丁四位同学每人随机地选择一家餐厅就餐(选择到每个餐厅概率相同),则下列结论正确的是(　　)

A.四人去了四个不同餐厅就餐的概率为 $\frac{5}{18}$

B.四人去了同一餐厅就餐的概率为 $\frac{1}{1\,296}$

C.四人中恰有两人去了第一餐厅就餐的概率为 $\frac{25}{216}$

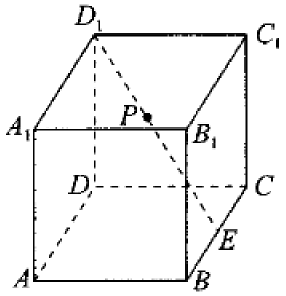
D.四人中去第一餐厅就餐的人数的数学期望为 $\frac{2}{3}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13.已知F_1,F_2分别是双曲线$3x^2-y^2=3a^2(a>0)$的左、右焦点，P是抛物线$y^2=8ax$与双曲线的一个交点.若$|PF_1|+|PF_2|=12$，则抛物线的准线方程为________.

14.若正项数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$S_n=\left(\frac{a_n+1}{2}\right)^2,n\in\mathbf{N}^*$，定义数列$\{b_n\}$对于正整数$m$，$b_m$是使不等式$a_n\geq 2^m$成立的$n$的最小值，则$\{b_n\}$的前10项和为___________.

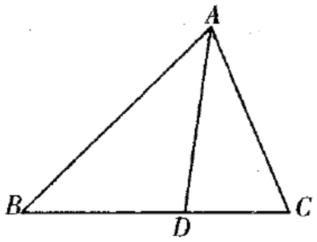
15.如图,在棱长为2的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E为BC的中点，P为直线D_1E上一动点，则点P到直线CC_1的距离的最小值为______________.



16.已知三棱锥$P-ABC$的四个顶点均在同一个球面上，底面$\triangle ABC$满足$BA=BC=\sqrt{6}$，$\angle ABC=\frac{\pi}{2}$，若该三棱锥体积的最大值为3其外接球的体积为_______.

四、解答题：本题共6小题，共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10分）在$\triangle ABC$中，$\angle B=\frac{\pi}{3},AB=15$，点$D$在边$BC$上，$CD=1,\cos\angle ADC=\frac{1}{26}$.



(1) 求 $\sin\angle BAD$;

(2) 求$\triangle ABC$的面积.

18.（12分）已知数列$\{a_n\}$的前5项分别为1,1+2,1+2+3,1+2+3+4,1+2+3+4+5,数列$\{b_n\}$满足$b_n=\frac{1}{a_n}$.

(1)求$\{b_n\}$的前n项和S_n.

(2)求数列$\left\{\frac{2+2^{n+1}}{2-S_{n-1}}\right\}$的前 n 项和T_n.

19. （12 分）体温是人体健康状况的直接反应，一般认为成年人腋下温度T （单位：$℃$）平均在$36℃\sim37℃$之间即为正常体温，超过$37.1℃$即为发热．发热状态下，不同体温可分成以下三种发热类型：低热：$37.1\le T\le38$；高热：$38<T\le40$；超高热（有生命危险）：$T>40$．某位患者因患肺炎发热，于 12 日至 26 日住院治疗．医生根据病情变化，从 14 日开始，以 3 天为一个疗程，分别用三种不同的抗生素为该患者进行消炎退热．住院期间，患者每天上午 8:00 服药，护士每天下午 16:00 为患者测量腋下体温记录如下：

抗生素使用情况	没有使用		使用“抗生素 A”治疗			使用“抗生素 B”治疗		
日期	12 日	13 日	14 日	15 日	16 日	17 日	18 日	19 日
体温（$℃$）	38.7	39.4	39.7	40.1	39.9	39.2	38.9	39.0

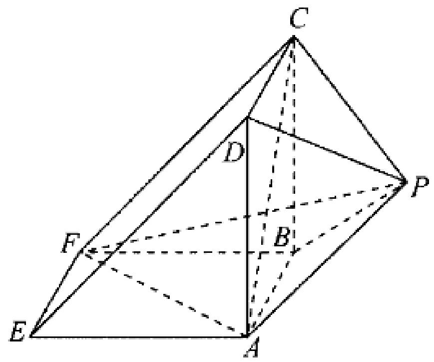
抗生素使用情况	使用“抗生素 C”治疗			没有使用			
日期	20 日	21 日	22 日	23 日	24 日	25 日	26 日
体温（$℃$）	38.4	38.0	37.6	37.1	36.8	36.6	36.3

（1）请你计算住院期间该患者体温不低于$39℃$的各天体温平均值；

（2）在 19 日—23 日期间，医生会随机选取 3 天在测量体温的同时为该患者进行某一特殊项目“α 项目”的检查，记X 为高热体温下做“α 项目”检查的天数，试求X 的分布列与数学期望；

（3）抗生素治疗一般在服药后 2-8 个小时就能出现血液浓度的高峰，开始杀灭细菌，达到消炎退热效果.假设三种抗生素治疗效果相互独立，请依据表中数据，判断哪种抗生素治疗效果最佳，并说明理由.

20.（12 分）如图所示,该几何体是由一个直三棱柱$ADE-BCF$和一个正四棱锥$P-ABCD$组合而成的,$AD\perp AF, AE=AD=2$.



(1)证明：平面 $PAD \perp$ 平面 $ABFE$；

(2)求正四棱锥 $P-ABCD$ 的高 h ,使得二面角 $C-AF-P$ 的余弦值是 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

21. （12 分）已知函数 $f(x)=x^2-(2m+1)x+\ln x(m\in R)$。

（1）当 $m=-\frac{1}{2}$ 时，若函数 $g(x)=f(x)+(a-1)\ln x$ 恰有一个零点，求 a 的取值范围；

（2）当 $x>1$ 时，$f(x)<(1-m)x^2$ 恒成立，求 m 的取值范围。

22. （12 分）已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$,且过点 $A(2,1)$

(1)求 C 的方程；

(2)点 M,N 在 C 上,且 $AM\perp AN, AD\perp MN$, D 为垂足,证明：存在定点 Q ,使得 $|DQ|$ 为定值.

答案以及解析

一、单项选择题

1.答案：B

解析：因为$A\cap B=\{4\}$,所以$4\in A$.若$m-2=4$,即$m=6,A=\{0,4,36\},B=\{2,3,4\}$,

$A\cap B=\{4\}$，符合题意.若$m^2=4$,即$m=\pm2$,当$m=2$时，$m-2=0$,不符合题意;当$m=-2$时,

$A=\{0,-4,4\},B=\{2,3,4\},A\cap B=\{4\}$,符合题意.所以实数$m$构成的集合为$\{6,-2\}$.

2.答案：A

解析：复数$-\frac{1+a\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}=\frac{(1+a\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{(2-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}=\frac{2-a+2a\mathrm{i}+\mathrm{i}}{5}$，它是纯虚数，所以$a=2$，

故选A

3.答案：C

解析：根据题意,分 2 步进行分析:

①、将 5 户贫困户分成 3 组,若分成 2、2、1 的三组,有$\frac{C_5^2C_3^2C_1^1}{A_2^2}=15$种分组方法,

若分成 3、1、1 的三组,有$\frac{C_5^3C_2^1C_1^1}{A_2^2}=10$种分组方法,

则有$15+10=25$种分组方法,

②、将分好的三组全排列,对应派出的 3 人,有$A_3^3=6$种情况,

则有$25\times6=150$种不同的包扶方案,

所以 C 选项是正确的.

4.答案：C

解析：已知$\triangle ABC$的面积为$\frac{a^2+b^2-c^2}{4}$,又$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C$,所以$\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{a^2+b^2-c^2}{4}$,整理可得$\sin C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$。根据余弦定理可知$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$,所以$\sin C=\cos C$。因为$C\in(0,\pi)$,所以$C=\frac{\pi}{4}$。故选 C。

5.答案：A

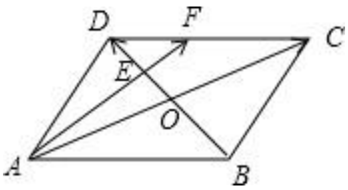
解析：记 9 个原始评分分别为a,b,c,d,e,f,g,h,i(按从小到大的顺序排列),易知 e 为 7 个有效评分与 9 个原始评分的中位数,故不变的数字特征是中位数,故选 A.

6.答案：D

解析：对于 A 选项,当 $x=1,2,3,4,5$ 时,对应的 y 值分别为$10,20,30,40,50$;对于 B 选项,当 $x=1,2,3,4,5$ 时,对应的 y 值分别为$10,20,40,70,110$;对于 C 选项,当 $x=1,2,3,4,5$ 时,对应的 y 值分别为$10,20,10+10\log_2 3,30,10+10\log_2 5$;对于 D 选项,当 $x=1,2,3,4,5$ 时,对应的 y 值分别为$10,20,40,80,160$.而表中所给的数据当 $x=1,2,3,4,5$ 时,对应的 y 值分别为$10,20,39,81,160$,通过比较,即可发现选项 D 中 y 的值误差最小,即 $y=5\times 2^x$ 能较好地反映 y 与 x 之间的关系,故选 D.

7.答案：C

解析：如图所示,



$\square ABCD$ 中,$\triangle DEF\backsim\triangle BEA$,

$\therefore \dfrac{DE}{EB}=\dfrac{DF}{AB}=\dfrac{1}{3}$,

再由 $AB=CD$ 可得 $\dfrac{DF}{DC}=\dfrac{1}{3}$,

$\therefore \overrightarrow{DF}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{DC}$;

又 $\overrightarrow{AC}=\vec{a},\overrightarrow{BD}=\vec{b}$,

$\therefore \overrightarrow{DC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BD}=\dfrac{1}{2}\vec{a}-\dfrac{1}{2}\vec{b}$,

$\therefore \overrightarrow{DF}=\dfrac{1}{6}\vec{a}-\dfrac{1}{6}\vec{b}$;

又 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BD}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CA}=\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{a}$

$\therefore \overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}=\left(\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{a}\right)+\left(\dfrac{1}{6}\vec{a}-\dfrac{1}{6}\vec{b}\right)=\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}$.

故选：C.

8.答案：B

解析：$\because f(3+x)=f(3-x)$

$\therefore f(6+x)=f(-x)$

又$\because$函数 $y=f\left(x\right)$是定义在 R 上的奇函数

$\therefore f(-x)=-f(x)$

$\therefore\ f(6+x)=f(-x)=-f(x)\ \therefore\ f(12+x)=f(x)$

则$T=12$是函数$y=f\left(x\right)$的一个周期

设$x\in(-6,-3)$则$x+6\in(0,3),f(x+6)=2^{x+6}=f(-x)=-f(x)$

即$f(x)=-2^{x+6}$，

$\therefore\ f(-5)=-2$故选：B

二、多项选择题

9.答案：ABCD

解析：因为点P在双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$上，结合双曲线的定义可得$|PF_1|-|PF_2|=2a$由题意得$|PF_1|=2|PF_2|$，$\therefore|PF_1|-|PF_2|=|PF_2|=2a$解出$|PF_2|=2a,|PF_1|=2|PF_2|=4a$在三角形$PF_1F_2$中，设$|F_1F_2|=2c$，又$\sin\angle F_1PF_2=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$,所以$\cos\angle F_1PF_2=\pm\dfrac{1}{4}$,当$\cos\angle F_1PF_2=\dfrac{1}{4}$时，由余弦定理得$|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|\cos\angle F_1PF_2$即：$4c^2=16a^2+4a^2-2\times4a\times2a\times\dfrac{1}{4}=16a^2$

所以$4c^2=16a^2$，即$c=2a$，$\therefore\ \mathrm{e}=\dfrac{c}{a}=2$又$a^2+b^2=c^2=4a^2$，可得$b=\sqrt{3}a$同理当$\cos\angle F_1PF_2=-\dfrac{1}{4}$时，可得$4c^2=24a^2$，即$c=\sqrt{6}a$，$\therefore\mathrm{e}=\sqrt{6}$又$a^2+b^2=c^2=6a^2$，可得$b=\sqrt{5}a$

10.答案：CD

解析：因为a_n是S_n与λ的等差中项，所以$2a_n=S_n+\lambda$，所以$a_1=\lambda,a_2=2\lambda$.又$2a_{n-1}=S_{n-1}+\lambda(n\geqslant2)$，所以$a_n=2a_{n-1}$，所以数列$\{a_n\}$是以$\lambda$为首项，2为公比的等比数列，$a_n=\lambda\cdot2^{n-1}$，故选项A错误.当$\lambda<0$时，数列$\{a_n\}$是单调递减数列，故选项B错误.因为$a_n=\lambda2^{n-1}$，所以$\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{\lambda2^{n-1}}$，当$\lambda>0$时，数列$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$是单调递减数列；当$\lambda<0$时，数列$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$是单调递增数列，故选项C正确.由于$a_na_{n+2}=\left(\lambda2^{n-1}\right)\left(\lambda2^{n+1}\right)=\lambda^2 2^{2n}>0$，故选项D正确.所以正确选项为CD.

11.答案：ACD

解析：函数$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$,导函数为$f'(x),xf'(x)-f(x)=x\ln x$,即满足$\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\dfrac{\ln x}{x}$.

$\because \left(\dfrac{f(x)}{x}\right)' = \dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$,$\therefore \left(\dfrac{f(x)}{x}\right)' = \dfrac{\ln x}{x}$.

$\therefore$可设$\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{1}{2}\ln^2 x + b$ (b 为常数),$\therefore f(x) = \dfrac{1}{2}x\ln^2 x + bx$.

$\because f\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\mathrm{e}}\ln^2\dfrac{1}{\mathrm{e}} + \dfrac{b}{\mathrm{e}} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$,解得$b = \dfrac{1}{2}$.

$\therefore f(x) = \dfrac{1}{2}x\ln^2 x + \dfrac{1}{2}x$.

$\therefore f(1) = \dfrac{1}{2}$,满足$0 < f(1) < 1$,$\therefore$C 正确.

$\because f'(x) = \dfrac{1}{2}\ln^2 x + \ln x + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}(\ln x + 1)^2 \geq 0$,且仅有$f'\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) = 0$,

$\therefore$B 错误,A,D 正确.故选 ACD.

12.答案：ACD

解析：四位同学随机选择一家餐厅就餐有6^4种选择方法.四人去了四个不同餐厅就餐的概率为$\dfrac{\mathrm{A}_6^4}{6^4} = \dfrac{5}{18}$，所以选项 A 正确；四人去了同一餐厅就餐的概率为$\dfrac{6}{6^4} = \dfrac{1}{216}$，所以选项 B 不正确；四人中恰有两人去了第一餐厅就餐的概率为$\dfrac{\mathrm{C}_4^2 \times 5^2}{6^4} = \dfrac{25}{216}$，所以选项 C 正确；每位同学选择去第一餐厅的概率为$\dfrac{1}{6}$，所以去第一餐厅就餐的人数$X \sim B\left(4, \dfrac{1}{6}\right)$，所以

$E(X) = 4 \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{2}{3}$，所以选项 D 正确.故选 ACD.

三、填空题

13.答案：$x = -2$

解析：将双曲线方程化为标准方程得$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{3a^2} = 1(a > 0)$，则$F_2$为抛物线的焦点，抛物线的准线方程为$x = -2a$，联立$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{3a^2} = 1, \\ y^2 = 8ax, \end{cases}$解得$x = 3a$ ($-\dfrac{a}{3}$ 舍去)，即点P的横坐标为$3a$.由

$\begin{cases} |PF_1| + |PF_2| = 12, \\ |PF_1| - |PF_2| = 2a, \end{cases}$解得$|PF_2| = 6 - a$，$\therefore |PF_2| = 3a + 2a = 6 - a$，解得$a = 1$，$\therefore$抛物线的准线方程为$x = -2$.

14.答案：1033

解析：当$n = 1$时，$S_1 = \left(\dfrac{a_1 + 1}{2}\right)^2$，解得$a_1 = 1$.

当$n\geq 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\dfrac{(a_n+1)^2-(a_{n-1}+1)^2}{4}$

整理，得$(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}-2)=0$.由题意得$a_n>0$，

$\therefore a_n-a_{n-1}-2=0$，故$\{a_n\}$为等差数列，且$a_n=2n-1$.

令$2n-1\geq 2^m$，则$n\geq 2^{m-1}+\dfrac{1}{2}$，且$n\in\mathbf{N}^*$，$\therefore b_m=2^{m-1}+1$，$m\in\mathbf{N}^*$.

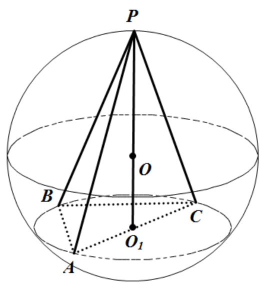
$\therefore\{b_n\}$的前 10 项和为$2^0+2^1+2^2+\cdots+2^9+10=\dfrac{1-2^{10}}{1-2}+10=1033$.

15.答案：$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

解析：点 P 到直线CC_1的距离的最小值就是异面直线D_1E与CC_1的距离.以点 D 为原点,分别以$\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DD_1}$的方向为 x 轴、 y 轴、 z 轴正方向建立空间直角坐标系,则$D_1(0,0,2),E(1,2,0),C(0,2,0),C_1(0,2,2)$,$\therefore\overrightarrow{D_1E}=(1,2,-2),\overrightarrow{CC_1}=(0,0,2)$. 设$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{D_1E},\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{CC_1},\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{D_1E}=x+2y-2z=0$,$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CC_1}=2z=0,\therefore z=0$,取$y=-1$,则$x=2,\therefore\boldsymbol{n}=(2,-1,0)$.又$\because\overrightarrow{CE}=(1,0,0),\therefore$异面直线$D_1E$与$CC_1$的距离$d=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CE}|}{|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

16.答案：$\dfrac{32}{3}\pi$

解析：如图所示：



设球心为O，$\triangle ABC$所在圆面的圆心为O_1，则$OO_1\perp$平面ABC；因为$BA=BC=\sqrt{6}$，$\angle ABC=\dfrac{\pi}{2}$,所以$\triangle ABC$是等腰直角三角形,所以$O_1$是$AC$中点;所以当三棱锥体积最大时,$P$为射线$O_1O$与球的交点，所以$V_{p-ABC}=\dfrac{1}{3}\cdot PO_1\cdot S_{\triangle ABC}$；因为$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}=3$，设球的半径为$R$,所以$PO_1=PO+OO_1=R+\sqrt{R^2-AO_1^{\,2}}=R+\sqrt{R^2-3}$,所以$\dfrac{1}{3}\cdot\left(R+\sqrt{R^2-3}\right)\cdot 3=3$，

解得：$R=2$，所以球的体积为：$\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{32\pi}{3}$.

四、解答题

17.答案：（1）由$\cos\angle ADC=\frac{1}{26}$，知$\sin\angle ADC=\sqrt{1-\left(\frac{1}{26}\right)^2}=\frac{15\sqrt{3}}{26}$，

则

$\sin\angle BAD=\sin\left(\angle ADC-60^\circ\right)=\sin\angle ADC\cdot\cos 60^\circ-\cos\angle ADC\cdot\sin 60^\circ$

$=\frac{15\sqrt{3}}{26}\times\frac{1}{2}-\frac{1}{26}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{7\sqrt{3}}{26}$.

（2）在$\triangle ABD$中，由正弦定理得:$\frac{BD}{\sin\angle BAD}=\frac{AB}{\sin\angle ADB}$，即$\frac{BD}{\frac{7\sqrt{3}}{26}}=\frac{15}{\frac{15\sqrt{3}}{26}}$, ,

即$BD=7$，所以$BC=7+1=8$，

于是$S=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC\cdot\sin\angle ABD=\frac{1}{2}\times 15\times 8\times\sin 60^\circ=30\sqrt{3}$.

18.答案：(1)由$a_1=1,a_2=1+2,a_3=1+2+3,a_4=1+2+3+4,\cdots$,得$a_n=\frac{n(n+1)}{2}$.

所以$b_n=\frac{1}{a_n}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$.

所以$S_n=2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=2-\frac{2}{n+1}$.

(2)记$c_n=\frac{2+2^{n+1}}{2-S_{n-1}}=\frac{2+2^{n+1}}{\frac{2}{n}}=n+n\cdot 2^n$.

则$T_n=c_1+c_2+\cdots+c_n$

$=(1+2+\cdots+n)+\left[2+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\cdots+(n-1)\cdot 2^{n-1}+n\cdot 2^n\right]$

$=\frac{n(n+1)}{2}+\left[2+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\cdots+(n-1)\cdot 2^{n-1}+n\cdot 2^n\right]$.

设$M_n=2+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\cdots+(n-1)\cdot 2^{n-1}+n\cdot 2^n$,①

则$2M_n=2^2+2\cdot 2^3+3\cdot 2^4+\cdots+(n-1)\cdot 2^n+n\cdot 2^{n+1}$.②

①-②,得$-M_n=2+2^2+2^3+\cdots+2^n-n\cdot 2^{n+1}$,

所以$M_n=(n-1)\cdot 2^{n+1}+2$.

所以$T_n=\frac{n(n+1)}{2}+(n-1)\cdot 2^{n+1}+2$.

19.答案：（1）由表可知，该患者共 6 天的体温不低于 $39°C$，记平均体温为 $\bar{x}$，·

$\bar{x}=\frac{1}{6}(39.4+39.7+40.1+39.9+39.2+39.0)=39.55°C$.

所以，患者体温不低于 $39°C$ 的各天体温平均值为 $39.55°C$.

（2）X 的所有可能取值为 0,1,2.

$P(X=0)=\frac{C_3^3C_2^0}{C_5^3}=\frac{1}{10}$,

$P(X=1)=\frac{C_3^2C_2^1}{C_5^3}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$,

$P(X=2)=\frac{C_3^1C_2^2}{C_5^3}=\frac{3}{10}$.

则 X 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$

所以 $E(X)=0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{3}{10}=\frac{6}{5}$.

（3）“抗生素 C ”治疗效果最佳可使用理由：

“抗生素 B ”使用期间先连续两天降温 $1.0°C$ 又回升 $0.1°C$，“抗生素 C ”使用期间持续降温共计 $1.2°C$，说明“抗生素 C ”降温效果最好，故“抗生素 C ”治疗效果最佳.

抗生素 B ”治疗期间平均体温 $39.03°C$，方差约为 0.0156；“抗生素 C ”平均体温 $38°C$，方差约为 0.1067，“抗生素 C ”治疗期间体温离散程度大，说明存在某个时间节点降温效果明显，故“抗生素 C ”治疗效果最佳.

“抗生素 B ”治疗效果最佳可使用理由：

自使用“抗生素 B ”开始治疗后，体温才开始稳定下降，且使用“抗生素 B ”治疗当天共降温 $0.7°C$，是单日降温效果最好的一天，故“抗生素 B ”治疗效果最佳.

20.答案：(1)在直三棱柱 $ADE-BCF$ 中, $AB\perp$ 平面 ADE,

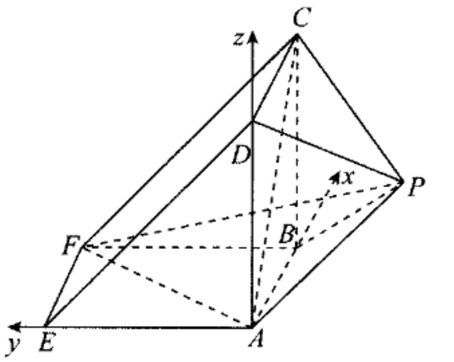
$AD\subset$ 平面 ADE,所以 $AB\perp AD$.

又 $AD\perp AF, AB\cap AF=A, AB\subset$ 平面 $ABFE, AF\subset$ 平面 $ABFE$,

所以 $AD\perp$ 平面 $ABFE$.

因为 $AD\subset$ 平面 PAD,所以平面 $PAD\perp$ 平面 $ABFE$.

(2)由(1)知 $AD\perp$平面 $ABFE$,如图,以 A 为原点, AB, AE, AD 所在直线分别为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系,



则 $A(0,0,0), F(2,2,0), C(2,0,2), P(1,-h,1), \overrightarrow{AF}=(2,2,0), \overrightarrow{AC}=(2,0,2), \overrightarrow{AP}=(1,-h,1)$.

设平面 AFC 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1, y_1, z_1)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AF}=2x_1+2y_1=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AC}=2x_1+2z_1=0,\end{cases}$ 取 $x_1=1$,则 $y_1=z_1=-1$,

所以 $\boldsymbol{m}=(1,-1,-1)$.

设平面 AFP 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2, y_2, z_2)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AF}=2x_2+2y_2=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AP}=x_2-hy_2+z_2=0,\end{cases}$ 取 $x_2=1$,则 $y_2=-1, z_2=-1-h$,

所以 $\boldsymbol{n}=(1,-1,-1-h)$.

因为二面角 $C-AF-P$ 的余弦值为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$,

所以 $|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{|1+1+1+h|}{\sqrt{3}\times\sqrt{2+(h+1)^2}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,

解得 $h=1$ 或 $h=-\frac{3}{5}$ (舍),

所以正四棱锥 $P-ABCD$ 的高 $h=1$.

21.答案:（1）由题知 $g(x)$ 定义域为 $(0,+\infty)$ ，当 $m=-\frac{1}{2}$ 时， $g(x)=x^2+a\ln x$

所以 $g'(x)=\frac{a}{x}+2x=\frac{2x^2+a}{x}$

①当 $a=0$ 时， $g(x)=x^2$ ， $x>0$ 时无零点。

②当 $a>0$ 时， $g'(x)>0$ ， $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递增,

取 $x_0=e^{-\frac{1}{a}}$，则 $g\left(e^{-\frac{1}{a}}\right)=-1+\left(e^{-\frac{1}{a}}\right)^2<0$

又因为 $g(1)=1$，所以 $g(x_0)\cdot g(1)<0$，所以 $g(x)$ 由 1 个零点。

③当 $a<0$ 时，令 $g'(x)=0$，得 $x=\sqrt{-\frac{a}{2}}$，

当 $0<x<\sqrt{-\frac{a}{2}}$ 时，$g'(x)<0$ 所以 $g(x)$ 在 $\left(0,\sqrt{-\frac{a}{2}}\right)$ 单调递减。

要使 $g(x)$ 恰有一个零点，则 $g\left(\sqrt{-\frac{a}{2}}\right)=a\ln\sqrt{-\frac{a}{2}}-\frac{a}{2}=0$，$a=-2e$。

（2）令 $h(x)=f(x)-(1-m)x^2=mx^2-(2m+1)x+\ln x$，

由题意 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h(x)<0$ 恒成立，$h'(x)=2mx-(2m+1)+\frac{1}{x}=\frac{(x-1)(2mx-1)}{x}$，

若 $0<m<\frac{1}{2}$，则当 $x\in\left(\frac{1}{2m},+\infty\right)$ 时，$h'(x)>0$ 恒成立，

所以 $h(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2m},+\infty\right]$ 内是增函数，且 $h(x)\in\left(h\left(\frac{1}{2m}\right),+\infty\right)$，所以不符合题意。

若 $m\geq\frac{1}{2}$，则当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$ 恒成立，

所以 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 内为增函数，且 $h(x)\in(h(1),+\infty)$，所以不符合题意。

若 $m\leq 0$，则当 $x\in(1,+\infty)$ 时，恒有 $h'(x)<0$。故 $h(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 内是减函数，

所以 $h(x)\langle 0$, 对任意 $x\in(1,+\infty)$ 都成立的充要条件是 $h(1)\leq 0$ 即 $m-(2m+1)\leq 0$

解得 $m\geq -1$ 故 $-1\leq m\leq 0$, 综上，m 的取值范围是 $[-1,0]$

22.答案：(1)由题设得 $\frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1,\frac{a^2-b^2}{a^2}=\frac{1}{2}$,解得 $a^2=6,b^2=3$.

所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)设 $M\left(x_1,y_1\right),N\left(x_2,y_2\right)$.

若直线 MN 与 x 轴不垂直,设直线 MN 的方程为 $y=kx+m$,代入 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$ 得

$\left(1+2k^2\right)x^2+4kmx+2m^2-6=0$.

于是 $x_1+x_2=-\frac{4km}{1+2k^2},x_1x_2=\frac{2m^2-6}{1+2k^2}$.①

由 $AM \perp AN$ 知 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = 0$,故 $\left(x_1-2\right)\left(x_2-2\right)+\left(y_1-1\right)\left(y_2-1\right)=0$,可得

$\left(k^2+1\right)x_1x_2+(km-k-2)\left(x_1+x_2\right)+(m-1)^2+4=0$.

将①代入上式可得 $\left(k^2+1\right)\frac{2m^2-6}{1+2k^2}-(km-k-2)\frac{4km}{1+2k^2}+(m-1)^2+4=0$.

整理得 $(2k+3m+1)(2k+m-1)=0$.

因为 $A(2,1)$ 不在直线 MN 上,所以 $2k+m-1\neq 0$,故 $2k+3m+1=0, k\neq 1$.

于是 MN 的方程为 $y=k\left(x-\frac{2}{3}\right)-\frac{1}{3}(k\neq 1)$.

所以直线 MN 过点 $P\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$,若直线 MN 与 x 轴垂直,可得 $N\left(x_1,-y_1\right)$,

由 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = 0$ 得 $\left(x_1-2\right)\left(x_1-2\right)+\left(y_1-1\right)\left(-y_1-1\right)=0$.

又 $\frac{x_1^2}{6}+\frac{y_1^2}{3}=1$,可得 $3x_1^2-8x_1+4=0$.解得 $x_1=2$ （舍去）, $x_1=\frac{2}{3}$.

此时直线 MN 过点 $P\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$.

令 Q 为 AP 的中点,即 $Q\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)$.

若 D 与 P 不重合,则由题设知 AP 是 Rt△ADP 的斜边,故 $|DQ|=\frac{1}{2}|AP|=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

若 D 与 P 重合,则 $|DQ|=\frac{1}{2}|AP|$.

综上,存在点 $Q\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)$,使得 $\left|DQ\right|$ 为定值.