2021 年新高考全国 I 卷第 21 题赏析与圆锥曲线的切割线定理

华南师范大学附属中学 (510630) 罗碎海

2021 年高考落下帷幕, 一线教师高考研究的热情进入高潮. 每年的高考题会出现一批批立意新颖充满趣味的好题, 2021 年新高考 I 卷数学第 21 题就是一例, 值得欣赏, 值得推广.

1 原题赏析

题目 (2021 年新高考全国 I 卷第 21 题) 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知点 $F_1\left(-\sqrt{17},0\right)$, $F_2\left(\sqrt{17},0\right)$, 点 M 满足 $|MF_1|-|MF_2|=2$. 记 M 的轨迹为 C.

(1) 求 C 的方程;

(2) 设点 T 在直线 $x=\frac{1}{2}$ 上, 过 T 的两条直线分别交 C 于 A,B 两点和 P,Q 两点, 且 $|TA|\cdot|TB|=|TP|\cdot|TQ|$, 求直线 AB 的斜率与直线 PQ 的斜率之和.

读完该题, 有几个问题值得思考:

问题 1 为什么题目给出的是双曲线的右支, 不是全部, 想考查什么?

问题 2 题目中的等式 $|TA|\cdot|TB|=|TP|\cdot|TQ|$, 在完整的双曲线中是否仍然成立?

问题 3 由等式 $|TA|\cdot|TB|=|TP|\cdot|TQ|$, 联想到圆的相交弦定理与切割线定理, 那么在圆锥曲线中有对应的定理吗?

分析 1 第一问很简单. 看到第二问, 自然想到用韦达定理转化求距离.

解法 1 (常规解答) (1) 因为 $|MF_1|-|MF_2|=2$, 所以轨迹 C 为双曲线右半支, 且 $c^2=17$, $2a=2$, 所以 $a^2=1$, $b^2=16$, 所以, 曲线 C 的方程为 $x^2-\frac{y^2}{16}=1\,(x>0)$.

(2) 设 $T(\frac{1}{2},n)$, 由题意, 直线 AB 斜率存在, 设直线 AB 方程: $y-n=k_1(x-\frac{1}{2})$, 联立 $\begin{cases} y-n=k_1(x-\frac{1}{2}), \\ x^2-\frac{y^2}{16}=1, \end{cases}$ 故 $\left(16-k_1^2\right)x^2+\left(k_1^2-2k_1n\right)x-\frac{1}{4}k_1^2-n^2+k_1n-16=0$, 注意到 $16-k_1^2\neq 0$, 且 $\Delta>0$, 所以

$$x_1+x_2=\frac{k_1^2-2k_1n}{k_1^2-16},\ x_1x_2=\frac{\frac{1}{4}k_1^2+n^2-k_1n+16}{k_1^2-16},$$

$$|TA|=\sqrt{1+k_1^2}(x_1-\frac{1}{2}),\ |TB|=\sqrt{1+k_1^2}(x_2-\frac{1}{2}),$$

所以 $|TA|\cdot|TB|=\frac{\left(n^2+12\right)\left(1+k_1^2\right)}{k_1^2-16}$.

同理, 设直线 PQ 方程: $y-n=k_2(x-\frac{1}{2})$, 可得 $|TP|\cdot|TQ|=\frac{\left(n^2+12\right)\left(1+k_2^2\right)}{k_2^2-16}$, 由 $|TA|\cdot|TB|=|TP|\cdot|TQ|$, 得到 $\frac{1+k_1^2}{k_1^2-16}=\frac{1+k_2^2}{k_2^2-16}$, 化简整理得到 $k_1^2=k_2^2$, 因为 $k_1\neq k_2$, 所以 $k_1+k_2=0$.

评述 (1) 在此解法中, 考虑到 $\Delta>0$, 但此时直线 AB 与双曲线的两个交点 A,B 可能分别在双曲线左右两支上, 这个 $\Delta>0$ 与该题不等价. 但无论是在双曲线一支上有两交点, 还是在两支上各有一个交点, 本题答案不变.

(2) 过点 $T(\frac{1}{2},n)$ 有两条直线与曲线右支各有两个交点, 且满足 $|TA|\cdot|TB|=|TP|\cdot|TQ|$, 这个 n 只能在直线 $x=\frac{1}{2}$ 与双曲线渐近线相交的那一段上, 要不要说明, 以上解答中没有.

(3) 如果以上两个细节要说清, 比较麻烦. 但该题结论对整个双曲线成立, 与一支或两支无关, 细节不清, 答案不受影响. 所以该题易做, 得满分不易.

分析 2 对于第二问, 看到 $|TA|\cdot|TB|=|TP|\cdot|TQ|$, 联系直线的参数方程中参数的几何意义, 应该更易解答.

解法 2 (参数法) 由 (1) 可知曲线 $C: x^2-\frac{y^2}{16}=1\,(x>0)$. 设 $T(\frac{1}{2},n)$, 设直线 AB 的倾斜角为 α, 则直线 AB 的参数方程为 $\begin{cases} x=\frac{1}{2}+t\cos\alpha, \\ y=n+t\sin\alpha, \end{cases}$ (t 为参数) 代入曲线 C 方程, 化简得 $(16\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)t^2+(16\cos\alpha-2n\sin\alpha)t-(n^2+12)=0$. 由参数 t 的几何意义得

$$|TA|\cdot|TB|=|t_1\cdot t_2|=\left|\frac{n^2+12}{16\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}\right|.$$

同理, 设直线 PQ 的倾斜角为 β, 得

$$|TP|\cdot|TQ|=|t_1\cdot t_2|=\left|\frac{n^2+12}{16\cos^2\beta-\sin^2\beta}\right|,$$

由题意可知, 直线斜率 k 满足 $|k|>4$, 得到 $16\cos^2\alpha-\sin^2\alpha<0$, $16\cos^2\beta-\sin^2\beta<0$, 由 $|TA|\cdot|TB|=|TP|\cdot|TQ|$, 得 $\sin^2\alpha-16\cos^2\alpha=\sin^2\beta-16\cos^2\beta$, $\Leftrightarrow 1-17\cos^2\alpha=1-17\cos^2\beta\Leftrightarrow\cos^2\alpha=\cos^2\beta$, 因为 $\alpha,\beta\in(0,\pi)$, 且 $\alpha\neq\beta$, 所以 $\alpha+\beta=\pi$, 所以, 两直线斜率 k_1 与 k_2 满足 $k_1+k_2=0$.

评述 该解法考虑直线与双曲线交于一支, 但未说明点 T 的位置. 由于答案不受影响, 还是抓主要矛盾吧. 也许出题人就是为了避免大家都得满分, 用双曲线一支编题.

2 圆锥曲线中的相交弦与切割线定理

在以上高考题中, 等式 $|TA|\cdot|TB|=|TP|\cdot|TQ|$ 使我们联想到圆中的相交弦定理与切割线定理, 那么, 此定理在一般的圆锥曲线中怎么样? 我们以椭圆为例分析.

2.1 圆的相交弦定理与切割线定理

圆中有一组优美的性质——相交弦、切割线定理:

(1) *相交弦定理* 如图 1, 圆 O 的两弦 AB,CD 交于圆内一点 M, 则 $MA\cdot MB=MC\cdot MD$.

(2) *割线定理* 如图 2, 过圆 O 外一点 M 作圆的两条割线 AB,CD, 与圆相交于 A,B,C,D, 则 $MA\cdot MB=MC\cdot MD$.

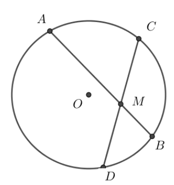

图 1

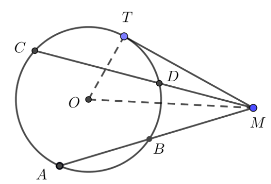

图 2

考虑割线的特殊情况变成切线, 得到切割线定理.

(3) *切割线定理* 如图 3, 过圆 O 外一点 M 作圆的一条割线交圆于 A,B 点, 作圆的一条切线 MT, 与圆切点为 T, 则 $MA\cdot MB=MT^2$.

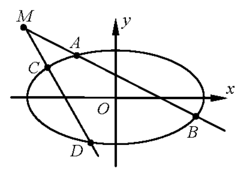

图 3

这三个定理是一个统一体, 是过一定点作直线与圆有公共点的问题. 定点在圆内还是圆外, 交点是两个还是重合为一个.

2.2 探讨相交弦定理在椭圆中的形式

在椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 中的长轴与短轴就是椭圆两条弦, 交于中心 O, 因为 $aa\neq bb$, 所以可知: 圆中的相交弦定理在椭圆中不成立. 那么它变成怎样的形式呢?

回到圆中分析, $MA\cdot MB=MC\cdot MD\Leftrightarrow\dfrac{MA\cdot MB}{MC\cdot MD}=1$, 是不是在圆锥曲线中这种比值变为其它数呢?

设过点 $P(x_0,y_0)$ 的直线 l、m 的倾斜角分别为 α、β, 椭圆 E 为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$, 其焦点不妨设为 $F(c,0)(c=\sqrt{a^2-b^2})$, 则可设直线 1: $\begin{cases}x=x_0+t\cos\alpha\\ y=y_0+t\sin\alpha\end{cases}$ (t 为参数), 代入椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, 得 $(b^2\cos^2\alpha+a^2\sin^2\alpha)\cdot t^2+2(b^2x_0\cos\alpha+a^2y_0\sin\alpha)\cdot t+b^2x_0^2+a^2y_0^2-a^2b^2=0$.

设点 A,B 对应的参数 t 分别为 t_1,t_2, 则

$$|PA|\cdot|PB|=t_1t_2=\frac{\left|b^2x_0^2+a^2y_0^2-a^2b^2\right|}{b^2\cos^2\alpha+a^2\sin^2\alpha},$$

同理有 $$|PC|\cdot|PD|=\frac{\left|b^2x_0^2+a^2y_0^2-a^2b^2\right|}{b^2\cos^2\beta+a^2\sin^2\beta}\qquad①$$

所以 $$\frac{|PA|\cdot|PB|}{|PC|\cdot|PD|}=\frac{b^2\cos^2\beta+a^2\sin^2\beta}{b^2\cos^2\alpha+a^2\sin^2\alpha}\qquad②$$

②式就是我们得到的椭圆割线的初步结果. 在②中, 若 $a=b$, 椭圆变为圆, ②为圆的割线定理, $\dfrac{|PA|\cdot|PB|}{|PC|\cdot|PD|}=1$; 若 $\beta=\pi-\alpha$, 也有 $\dfrac{|PA|\cdot|PB|}{|PC|\cdot|PD|}=1$, 这是高中数学选修 4-4《坐标系与参数方程》(人教 A 版) P38 例 4; 从推导过程发现该关系在双曲线中依然成立, 这正是文首今年高考题类型.

我们还发现①中比值只与椭圆长短轴长和直线的倾斜角有关, 与点 P 的坐标倒无关. 很自然想到取点 P 为椭圆中心, 易得结果. 但对抛物线来说没有中心, 还是取椭圆的一个焦点更科学.

过焦点 F 作与 l 平行的焦点弦为 MN, 即在①中将 (x_0,y_0) 代为 $(c,0)$ 得

$$|FM|\cdot|FN|=\frac{|b^2c^2-a^2b^2|}{b^2\cos^2\alpha+a^2\sin^2\alpha}=\frac{b^4}{b^2\cos^2\alpha+a^2\sin^2\alpha}\qquad③$$

而 $\dfrac{1}{|FM|}+\dfrac{1}{|FN|}=\dfrac{2}{ep}=\dfrac{2a}{b^2}$ †, 所以 $|MN|=|FM|+|FN|=\dfrac{2a}{b^2}|FM|\cdot|FN|$, 将③代入, 得 $|MN|=\dfrac{2ab^2}{b^2\cos^2\alpha+a^2\sin^2\alpha}$, 即 $d_1=\dfrac{2ab^2}{b^2\cos^2\alpha+a^2\sin^2\alpha}$, 同理 $d_2=\dfrac{2ab^2}{b^2\cos^2\beta+a^2\sin^2\beta}$, 所以 $\dfrac{d_1}{d_2}=\dfrac{b^2\cos^2\beta+a^2\sin^2\beta}{b^2\cos^2\alpha+a^2\sin^2\alpha}$, 所以 $\dfrac{|PA|\cdot|PB|}{|PC|\cdot|PD|}=\dfrac{d_1}{d_2}$.

同理分析其它圆锥曲线, 得到以下统一定理:

定理 1 过点 P 的直线 l,m 分别交圆锥曲线 E 于点 A、B 和 C、D, d_1 与 d_2 为与 l,m 分别平行的焦点弦长, 则 $\dfrac{|PA|\cdot|PB|}{|PC|\cdot|PD|}=\dfrac{d_1}{d_2}$.

当点 P 在圆锥曲线外 (不含焦点的部分), 且 C、D 重合于点 T 时, 即得圆锥曲线的切割线定理.

定理 2 点 P 在圆锥曲线外 (不含焦点的部分), 过点 P 的直线 l 与圆锥曲线 E 交于点 A、B, 过点 P 的直线 m 与 E 切于点 T, d_1、d_2 为与 l,m 分别平行的焦点弦长, 则 $\dfrac{|PA|\cdot|PB|}{PT^2}=\dfrac{d_1}{d_2}$.

类似地, 还可得

定理 3 点 P 在圆锥曲线外 (不含焦点的部分), 过点 P 的直线 l,m 与圆锥曲线 E 分别切于点 A 和 B, d_1、d_2 为与 l,

† 在极坐标系下, 以焦点 F 为极点的圆锥曲线的方程为 $\rho=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$, 过焦点的弦为 MN, 则 $\dfrac{1}{FM}+\dfrac{1}{FN}=\dfrac{1-e\cos\theta}{ep}+\dfrac{1+e\cos\theta}{ep}=\dfrac{2}{ep}$, 而 p 为焦点到对应准线距离, $p=\dfrac{a^2}{c}-c=\dfrac{b^2}{c}$, $e=\dfrac{c}{a}$, 所以 $\dfrac{1}{FM}+\dfrac{1}{FN}=\dfrac{2}{ep}=\dfrac{2a}{b^2}$.

从广州一模压轴题分析极值点偏移问题的发展

广东广雅中学 (510160)　　赖淑明

摘要　今年的广州一模题考查了极值点偏移问题, 笔者以此题为依据, 思考极值点偏移问题的题干发展、设问发展和各解法适用题型的发展.

关键词　极值点偏移; 双变量不等式

极值点偏移问题自从 2010 年天津卷考查之后, 近 10 年在各地高考题中经常见到它的身影, 也掀起了一波研究热潮, 关于极值点偏移问题的解法的研究, 已经有很多同行在各大期刊发表过文章. 极值点偏移问题似乎已经被套路化, 解法已经程序化. 然而, 笔者认为极值点偏移的发展不会止步, 因为双变量问题是中学函数导数问题的一大热点, 而极值点偏移问题的解决办法为双变量问题的解决提供了依据和参考, 是双变量问题的始祖. 广州一模于 3 月 19 日结束, 笔者受一模压轴题的这道极值点偏移题目的启发, 思考极值点偏移问题的未来发展.

题目 1 (2021 年 3 月广州一模) 已知函数 $f(x)=x\ln x-ax^2+x(a\in\mathbb{R})$.

(I) 证明: 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线恒过定点;

(II) 若 $f(x)$ 有两个零点 x_1,x_2, 且 $x_2>2x_1$, 证明: $\sqrt{x_1^2+x_2^2}>\dfrac{4}{\mathrm{e}}$.

本题 $f(x)=x\ln x-ax^2+x(a\in\mathbb{R})$ 有两个零点 x_1,x_2, 实质等价于 $g(x)=\ln x-ax+1$ 有两个零点 x_1,x_2, 因此本题的题源实质是下面两个:

题源 1　若 $g(x)=\ln x-ax+1$ 有两个零点 x_1,x_2, 证明: $x_1+x_2>\dfrac{2}{a}$. (或证明 $g'(\dfrac{x_1+x_2}{2})<0$).

题源 2　若 $g(x)=\ln x-ax+1$ 有两个零点 x_1,x_2, 证明: $x_1+x_2>2$.

题源 1 是研究 $g(x)=\ln x-ax+1$ 的极值点, $y=g(x)$ 的极值点为 $x=\dfrac{2}{a}$, 极值点左偏.

题源 2, 研究 $g(x)=\ln x-ax+1$ 的零点, 即研究方程 $a=\dfrac{\ln x+1}{x}$ 的根, $h(x)=\dfrac{\ln x+1}{x}$ 的极值点为 $x=1$, 极值点左偏.

极值点偏移问题有四种常规解题思路, 以题源 2 为例.

思路一　对称构造, 借助函数单调性解决问题.

设 $h(x)=\dfrac{\ln x+1}{x}$, $h'(x)=\dfrac{-\ln x}{x^2}$, 由 $h'(x)=0$ 得 $x=1$.

当 $x\in(0,1)$ 时, $h'(x)>0$, $y=h(x)$ 单调递增; 当 $x\in(1,+\infty)$ 时, $h'(x)<0$, $y=h(x)$ 单调递减.

$h(\dfrac{1}{\mathrm{e}})=0$, 由洛必塔法则知 $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x+1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=0$, 故 $y=a$ 与 $h(x)=\dfrac{\ln x+1}{x}$ 有两个交点, 则 $0<a<1$, 且 $\dfrac{1}{\mathrm{e}}<x_1<1<x_2$. 依题意有 $h(x_2)-h(2-x_1)=h(x_1)-h(2-x_1)$, 设 $F(x)=h(x)-h(2-x)(\dfrac{1}{\mathrm{e}}<x<1)$. 则 $F'(x)=\dfrac{-\ln x}{x^2}+\dfrac{-\ln(2-x)}{(2-x)^2}$, 因为 $(2-x)^2>x^2$, 所以 $\dfrac{\ln(2-x)}{(2-x)^2}<\dfrac{\ln(2-x)}{x^2}$. 则 $F'(x)=\dfrac{-\ln x}{x^2}+\dfrac{-\ln(2-x)}{(2-x)^2}=\dfrac{-\ln x(2-x)}{x^2}>\dfrac{-\ln 1}{x^2}=0$. 所以 $F(x)$ 在 $(\dfrac{1}{\mathrm{e}},1)$ 上单调递增. 所以 $F(x)<F(1)=0$, 所以 $h(x)-h(2-x)<0$, 所以 $h(x_1)<h(2-x_1)$, 即 $h(x_2)<h(2-x_1)$. 因为 $\dfrac{1}{\mathrm{e}}<x_1<1<x_2$, 则 $2-x_1>1$, 又 $y=h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递减, 所以 $x_2>2-x_1$, 即 $x_2+x_1>2$. 问题得证.

思路二　捆绑换元法, 令 $t=\dfrac{x_1}{x_2}$, 变双变量问题为单变量问题解决, 也称万能 t 代换法.

由 $\begin{cases}a=\dfrac{\ln x_1+1}{x_1},\\ a=\dfrac{\ln x_2+1}{x_2},\end{cases}$ 令 $\dfrac{x_1}{x_2}=t$, 则 $t\in(0,\dfrac{1}{2})$. 由 $\dfrac{\ln x_1+1}{x_1}=\dfrac{\ln x_2+1}{x_2}$ 得 $\dfrac{\ln tx_2+1}{tx_2}=\dfrac{\ln x_2+1}{x_2}$, 解得 $\ln x_2=\dfrac{\ln t}{t-1}-1$, 故 $\ln x_1=\dfrac{t\ln t}{t-1}-1$,$\ln x_1+\ln x_2=\dfrac{\ln t}{t-1}+\dfrac{t\ln t}{t-1}-2$, 令 $H(t)=\dfrac{\ln t}{t-1}+\dfrac{t\ln t}{t-1}-2$, 则有 $H'(t)=$

---

m 分别平行的焦点弦长, 则 $\dfrac{PA^2}{PB^2}=\dfrac{d_1}{d_2}$.

到此, 我们看到了圆的切割线定理在一般的圆锥曲线中的数学形式. 从数与形的统一、特殊与一般辨证关系去分析问题, 才能看到问题的本质与数学的发展规律, 这也是我们学好数学的基本思想. 高考题大多是将一般性问题特殊化、具体化. 只要平时做好对每个问题特殊性与一般性分析, 看高考题如掌上观纹.

参考文献

[1] 坐标系与参数方程 (普通高中课程标准实验教科书数学选修 4-4, A 版)[M]. 北京: 人民教育出版社, 2020:38.

[2] 罗碎海. 聊聊数语 [M]. 广州: 暨南大学出版社, 2021: 188.