

小专题： 离心率

主备人：周纯阳

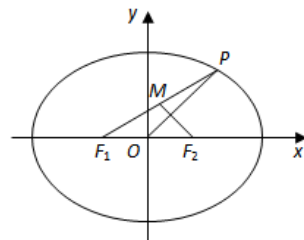
课标定位：探究如何求椭圆与双曲线的离心率，离心率的取值范围.

题型探究

启迪思维 探究重点

一、寻求齐次方程求离心率

例 1. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，点 P 在椭圆 E 上. 若点 P 横坐标为 $\frac{a}{2}$ ，点 M 为 PF_1 中点，且 $OP \perp F_2M$ ，求椭圆 E 的离心率.



二、以焦点三角形为指向求离心率

例 2. 设 F_1, F_2 分别是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点，点 P 在椭圆 C 上，若线段 PF_1 的中点在 y 轴上， $\angle PF_1F_2 = 30^\circ$ ，求椭圆的离心率.

三、利用圆锥曲线的范围求离心率的取值范围

例 3. 已知 $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的两个焦点, P 为椭圆上一点, 且 $\vec{PF}_1 \cdot \vec{PF}_2 = c^2$, 求椭圆离心率的取值范围.

点评: (1)通过设点的坐标, 利用圆锥曲线上点的坐标的范围, 转化为离心率的取值范围.

(2)利用圆锥曲线的焦半径(圆锥曲线上一点到焦点的距离叫做该点的焦半径)的范围确定离心率的范围.

①椭圆焦半径的取值范围为 $[a-c, a+c]$;

②双曲线的焦半径:

(i)点 P 与焦点 F 同侧时, 其取值范围为 $[c-a, +\infty)$;

(ii)点 P 与焦点 F 位于异侧时, 其取值范围为 $[c+a, +\infty)$.

达标检测

1. 过双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一个焦点 F 引它的一条渐近线的垂线 FM , 垂足为 M , 并且交 y 轴于点 E , 若 M 为 EF 的中点, 则该双曲线的离心率为()
A. 2 B. $\sqrt{3}$ C. 3 D. $\sqrt{2}$

2. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 M 在双曲线的左支上, 且 $MF_2 = 7MF_1$, 则此双曲线的离心率的最大值为_____.

针对训练

班级: _____ 姓名: _____

1. 设双曲线的一个焦点为 F , 虚轴的一个端点为 B , 如果直线 FB 与该双曲线的一条渐近线垂直, 那么此双曲线的离心率为()

- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

2. 设 F_1, F_2 分别为双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点, 双曲线上存在一点 P 使得 $PF_1 + PF_2 = 3b$,

$PF_1 \cdot PF_2 = \frac{9}{4}ab$, 则该双曲线的离心率为()

- A. 3 B. $\frac{9}{4}$ C. $\frac{5}{3}$ D. $\frac{4}{3}$

3. 椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 焦距为 $2c$. 若直线 $y = \sqrt{3}(x+c)$ 与椭圆 Γ 的一个交点 M 满足 $\angle MF_1F_2 = 2\angle MF_2F_1$, 则该椭圆的离心率等于()

- A. $\sqrt{2}-1$ B. $\sqrt{5}-2$
C. $\sqrt{3}-1$ D. $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

4. 设 A, B 是焦点在 x 轴上的椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 长轴的两个端点, 若 C 上存在点 P 满足 $\angle APB = 120^\circ$, 则该椭圆离心率 e 的取值范围是_____.

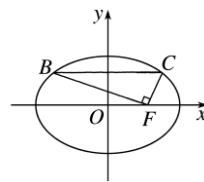
5. 设 F_1, F_2 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦点, 过点 F_1 且垂直于 x 轴的直线与椭圆交于 A, B 两点, 若 $\triangle ABF_2$ 为锐角三角形, 则该椭圆离心率 e 的取值范围是_____.

6. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点为 F , 若过点 F 且倾斜角为 60° 的直线 l 与双曲线的右支有且只有一个交点, 则双曲线的离心率 e 的取值范围是_____.

7. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的渐近线与圆 $x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$ 有公共点, 则双曲线的离心率的取值范围是_____.

8. 已知 F_1, F_2 分别是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点, 过 F_2 的直线交椭圆于 P, Q 两点, 若 $\angle F_1PQ = 45^\circ$, $PQ = \sqrt{2}PF_1$, 则椭圆的离心率为_____.

9. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中， F 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点，直线 $y = \frac{b}{2}$ 与椭圆交于 B, C 两点，且 $\angle BFC = 90^\circ$ ，求该椭圆的离心率.



►探究与拓展

10. 已知椭圆和双曲线有公共焦点 F_1, F_2 , P 是它们的一个交点， $\angle F_1PF_2 = 60^\circ$ ，记椭圆和双曲线的离心率分别为 e_1 和 e_2 . 且 e_1 与 e_2 互为倒数，求 e_1 的值.

离心率专题答案

例 1、设椭圆 E 焦距为 $2c$ ，则 $F_1(-c, 0)$ ， $F_2(c, 0)$ ，

$$x = \frac{a}{2} \text{ 代入 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ 得 } y^2 = \frac{3b^2}{4},$$

不妨设点 P 在 x 轴上方，故点 P 坐标为 $\left(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}b}{2}\right)$ ，

又点 M 为 PF_1 中点，故点 M 坐标为 $\left(\frac{a-2c}{4}, \frac{\sqrt{3}b}{4}\right)$ ，

$$\text{所以 } \overrightarrow{F_2M} = \left(\frac{a-6c}{4}, \frac{\sqrt{3}b}{4}\right), \quad \overrightarrow{OP} = \left(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}b}{2}\right),$$

由 $OP \perp F_2M$ 得 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{F_2M} = 0$ ，

$$\text{即 } \frac{a-6c}{4} \cdot \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{3}b}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}b}{2} = 0, \text{ 化简得 } a^2 - 6ac + 3b^2 = 0,$$

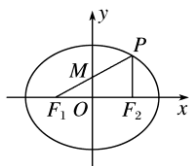
$$\text{将 } b^2 = a^2 - c^2 \text{ 代入得 } 3c^2 + 6ac - 4a^2 = 0, \text{ 即 } 3\left(\frac{c}{a}\right)^2 + 6 \cdot \frac{c}{a} - 4 = 0,$$

$$\text{所以 } 3e^2 + 6 \cdot e - 4 = 0, \text{ 解得 } e = -1 \pm \frac{\sqrt{21}}{3},$$

$$\text{因为 } e \in (0, 1), \text{ 所以椭圆 } E \text{ 的离心率为 } e = \frac{\sqrt{21}}{3} - 1.$$

达标检测

例 2 解析 如图，设 PF_1 的中点为 M ，连结 PF_2 。



因为 O 为 F_1F_2 的中点，

所以 OM 为 $\triangle PF_1F_2$ 的中位线。

所以 $OM \parallel PF_2$ ，所以 $\angle PF_2F_1 = \angle MOF_1 = 90^\circ$ 。

因为 $\angle PF_1F_2 = 30^\circ$ ，

所以 $PF_1 = 2PF_2$ ， $F_1F_2 = \sqrt{3}PF_2$ 。

由椭圆定义得 $2a = PF_1 + PF_2 = 3PF_2$ ，

$$\text{即 } a = \frac{3PF_2}{2},$$

$$2c = F_1F_2 = \sqrt{3}PF_2, \text{ 即 } c = \frac{\sqrt{3}PF_2}{2},$$

$$\text{则 } e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}PF_2}{2} \cdot \frac{2}{3PF_2} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

例3 解析 设 $P(x, y)$, 则 $\vec{PF}_1 \cdot \vec{PF}_2 = (-c-x, -y) \cdot (c-x, -y) = x^2 - c^2 + y^2 = c^2$,

将 $y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2$ 代入上式,

$$\text{解得 } x^2 = \frac{(2c^2 - b^2)a^2}{c^2} = \frac{(3c^2 - a^2)a^2}{c^2}.$$

又 $x^2 \in [0, a^2]$, $\therefore 2c^2 \leq a^2 \leq 3c^2$,

$$\therefore e = \frac{c}{a} \in \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right].$$

达标检测

1 D

2 因为 $MF_2 = 7MF_1$, 所以 $MF_2 - MF_1 = 6MF_1$,

即 $2a = 6MF_1 \geq 6(c-a)$, 故 $8a \geq 6c$, 即 $e = \frac{c}{a} \leq \frac{4}{3}$, 当且仅当 M 为双曲线的左顶点时, 等号成立.

故此双曲线离心率的最大值为 $\frac{4}{3}$.

针对训练

1 D

2 C

3 C

4 $[\frac{\sqrt{6}}{3}, 1)$

5 $(\sqrt{2}-1, 1)$

6 由题意, 知 $\frac{b}{a} \geq \sqrt{3}$, 则 $\frac{b^2}{a^2} \geq 3$, 所以 $e = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} \geq 2$.

7 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的渐近线与圆 $x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$ 有公共点, 则双曲线的离心率的取值范围是_____.

答案 $\left(1, \frac{3\sqrt{5}}{5}\right]$

解析 双曲线的渐近线的方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$, 圆的方程可化为 $(x-3)^2 + y^2 = 4$. 若渐近线与圆有公共点, 则

$$\frac{3b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leq 2, \text{ 即 } 3b \leq 2c, \therefore b^2 \leq \frac{4}{9}c^2, \therefore c^2 - a^2 \leq \frac{4}{9}c^2,$$

$$\therefore \frac{5}{9}c^2 \leq a^2, \therefore e^2 = \frac{c^2}{a^2} \leq \frac{9}{5}, \therefore e \leq \frac{3\sqrt{5}}{5}.$$

$$\text{又 } \because e > 1, \therefore 1 < e \leq \frac{3\sqrt{5}}{5}.$$

8 在 $\triangle F_1PQ$ 中, $\angle F_1PQ = 45^\circ$,

$$PQ = \sqrt{2}PF_1,$$

由余弦定理可得 $F_1Q^2 = PF_1^2 + 2PF_1^2 - 2\sqrt{2}PF_1^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = PF_1^2$, $\therefore F_1Q = PF_1$,

$\therefore \triangle F_1PQ$ 为等腰直角三角形, 斜边 $PQ \perp x$ 轴,

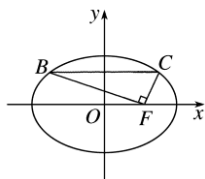
$\therefore \triangle F_1PF_2$ 为等腰直角三角形,

$$\therefore PF_1 = \sqrt{2}F_1F_2 = 2\sqrt{2}c, \quad PF_2 = F_1F_2 = 2c.$$

由椭圆的定义知 $2a = PF_1 + PF_2 = 2\sqrt{2}c + 2c = 2(\sqrt{2} + 1)c$,

$$\therefore \text{椭圆的离心率 } e = \frac{2c}{2(\sqrt{2} + 1)c} = \sqrt{2} - 1.$$

9 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, F 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点, 直线 $y = \frac{b}{2}$ 与椭圆交于 B, C 两点, 且 $\angle BFC = 90^\circ$, 求该椭圆的离心率.



解 由已知条件易得 $B\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a, \frac{b}{2}\right)$,

$$C\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a, \frac{b}{2}\right), \quad F(c, 0).$$

$$\therefore \vec{BF} = \left(c + \frac{\sqrt{3}}{2}a, -\frac{b}{2}\right),$$

$$\vec{CF} = \left(c - \frac{\sqrt{3}}{2}a, -\frac{b}{2}\right).$$

由 $\angle BFC = 90^\circ$, 可得 $\vec{BF} \cdot \vec{CF} = 0$,

$$\text{所以 } \left(c - \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)\left(c + \frac{\sqrt{3}}{2}a\right) + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 = 0,$$

$$c^2 - \frac{3}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 = 0,$$

$$\text{即 } 4c^2 - 3a^2 + (a^2 - c^2) = 0, \text{ 亦即 } 3c^2 = 2a^2,$$

$$\text{所以 } \frac{c^2}{a^2} = \frac{2}{3}, \text{ 则 } e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

10 不妨设椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1 (a_1 > b_1 > 0)$, 双曲线的标准方程为 $\frac{x^2}{a_2^2} - \frac{y^2}{b_2^2} = 1 (a_2 > 0, b_2 > 0)$, $F_1F_2 = 2c$,

不妨设 $PF_1 > PF_2$,

$$PF_1 + PF_2 = 2a_1, \quad \textcircled{1}$$

$$PF_1 - PF_2 = 2a_2, \quad \textcircled{2}$$

由①与②可得, $PF_1 = a_1 + a_2$, $PF_2 = a_1 - a_2$,

由余弦定理得, $F_1F_2^2 = PF_1^2 + PF_2^2 - 2PF_1 \cdot PF_2 \cos 60^\circ$ 即 $4c^2 = (a_1 + a_2)^2 + (a_1 - a_2)^2 - (a_1 + a_2)(a_1 - a_2)$,

$$4c^2 = a_1^2 + 3a_2^2, \therefore \frac{1}{e_1^2} + \frac{3}{e_2^2} = 4, \text{ 又 } e_2 = \frac{1}{e_1}, \text{ 则 } \frac{1}{e_1^2} + 3e_1^2 = 4, \text{ 即 } 3e_1^4 - 4e_1^2 + 1 = 0, \text{ 得 } e_1^2 = \frac{1}{3} \text{ 或 } 1 (\text{舍去}), e_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$