

例析研究新函数图像的基本策略*

王成刚

(江苏省盐城市初级中学 224001)

函数是初中数学的核心内容之一,是高中后继学习的基础.在初中,学生通过一次函数、反比例函数和二次函数的学习,能初步形成研究函数图像与性质的基本方法和基本思路,并积累相应的基本活动经验和思考策略,为研究一些简单的新函数奠定了基础.那么,立足初中函数的学习基础,该如何探究新函数的图像与性质呢?在2017年11月江苏省初中青年教师优秀课观摩与评比活动中,笔者有幸开设了题为“以不变应万变——探究新函数的图像”的数学活动探究课,以下是笔者的设计思想、教学实施和一些教学思考.

1 设计思想

1.1 问题提出

问题1 不少老师喜欢在课堂上借助图形计算器快速画出所给函数的图像,这种做法虽然直观、快捷,但掩盖了画函数图像需经历的分析与体验过程.

问题2 文[1]提到,设计一个方案,探究函数 $y = x^2 + \frac{1}{x-1}$ 的图像与性质.在此设计方案中,要求“根据已有经验,取点,列表”(图1).对此,笔者站在学生的立场有以下疑惑:①在这复杂问题背景下,初中学生对取点和列表已有了哪些经验?这些经验到底是什么?又是如何得到这些经验的?②问题中所列的表格是怎么来的?学生能理解取这些点的理由吗?这些有限个点是否具有代表性?有了这些有限个点,学生该如何连线?所画出的图像就是该函数的图像吗?回避这些问题,也掩盖了研究函数图像的本质问题.

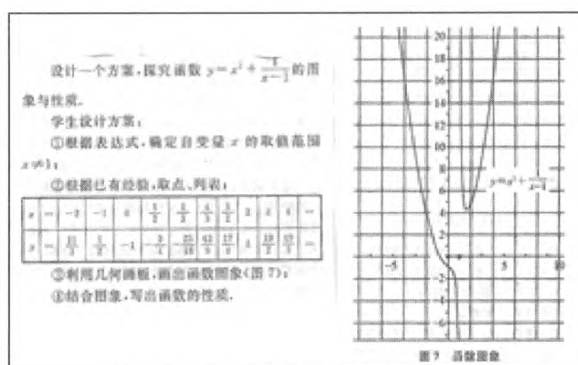


图1

问题3 在学完“三大函数”后,学生虽已依次经历由图像特征得图像性质(由形到数)的过程,知道图像是性质的关键,但因三类函数表达式的形式单一,学生对取点和列表的经验、连线的方法以及描述图像的性质,还显得零碎和杂乱.为高中后续学习,有必要加以归纳和提炼,并思考是否能用图像性质倒逼图像特征(由数想形).

1.2 案例启示

启示1 苏教版教材在画反比例函数 $y = \frac{6}{x}$ 的图像之前,要求学生回答下列问题:① x, y 的值可以为0吗?这个函数的图像与 x 轴, y 轴有交点吗?② x, y 所取值的符号有什么关系?这个函数的图像会在哪几个象限?③当 $x > 0$ 时,随着 x 的增大(减小), y 怎样变化?当 $x < 0$ 时,随着 x 的增大(减小), y 怎样变化?对此,笔者认为教材的编写意图是引导学生先形成对反比例函数 $y = \frac{6}{x}$ 图像的大致认识,然后再经历“列表,描点,连

* 1 本文为盐城市教育科学“十三五”规划课题《初中生数学实践与创新能力培养路径的校本研究》的研究成果.课题编号:2016-L-108.

线”的过程,画出函数的图像.这一过程,正是用描述函数图像性质的角度来倒逼图像特征的过程,并为取点和列表提供了依据.

启示 2 文[2]提到:你准备如何研究 $y = x^3 - 3x^2$ 图像与性质? 分别从什么角度入手研究(图 2)? 高中对函数的图像与性质的研究,通常是结合函数表达式,①从函数的定义域、值域,确定函数图像的分布和连续与间断情况;②从函数的奇偶性,确定函数图像的关于原点、y 轴的对称性;③用求导的方法,确定函数的单调性、极值、最值、零点等,得到图像的特征,为如何列表和连线提供了依据.

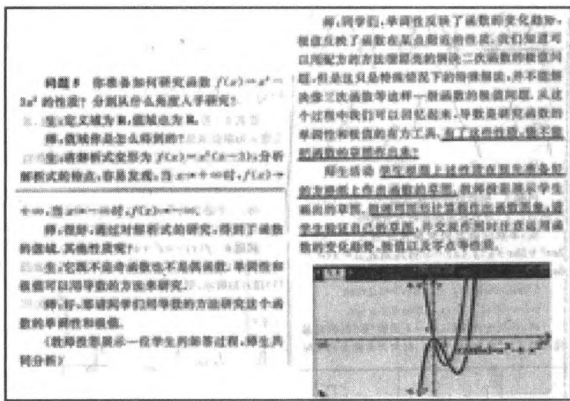


图 2

这样的分析过程为我们解决问题 1 和问题 2 提供了方法,为解决问题 3 提供了一般路径.笔者认为,高中的这种研究方式虽然不能直接搬到初中,但对初中函数内容的教学有一定的借鉴意义.可以在不告知学生上述具体名称的前提下,帮助学生提炼描述函数性质的角度,以便初中学生也能更全面准确地把握所给陌生函数图像的一些特征,引导学生科学地思考问题.

1.3 解决问题设想

设想 1 通过对以上案例的分析,形成 2 个想法:①在初中阶段,研究函数性质的关键是图像,而画图像的难点是图像的特征(长相),依据学生已有的经验,采用怎样的方法去倒逼图像的特征?②我们能否提炼学生已有经验,形成探究新函数图像的“通性通法”?

设想 2 确定的本节课的设计思路和教学目标如下:①在学生已有认知的基础上,通过实例归纳出研究函数图像与性质的几个常见角度;②运

用所总结的方法继续探究新函数的图像,加深对上述方法的理解与感悟;③经历对新函数图像的探究过程,初步掌握探究函数图像特征的一般方法,形成探究新函数图像的“通性通法”;④通过对新函数图像的探究,利用图形计算器快速画图的功能,借助自主探究与互动合作的融合,激发学生的探究兴趣,发展学生的核心素养.

2 教学实施

2.1 提出新问题,引入课题

师:前面我们研究了一些函数的图像,下面请大家思考:

问题 如何在平面直角坐标系中画出函数 $y = \frac{6}{(x+2)^2 + 1}$ 的图像?

(学生沉默)

师:这不是我们熟悉的函数,所以大家感到有点困难.那么如何画陌生函数的图像呢?为了解决这个问题,就让我们走进今天的课堂——探究新函数的图像(板书课题).

2.2 探究体验,方法提炼

师:我们不妨先从几个熟悉的函数入手来研究.

前置练习 请快速画出下列三个函数的图像:

$$\textcircled{1} y = x + 2; \textcircled{2} y = \frac{6}{x}; \textcircled{3} y = (x + 2)^2 + 1.$$

(投影展示部分学生所画图像)

师:结合所画图像,请同学们思考:

问题 1 画函数的图像,通常要经历哪几个步骤?(列表、描点、连线.)

追问 1 画这三个图像时,你分别取了几个点?(2个、6个、5个.)

追问 2 你为什么能根据有限的这几个点画出上述函数的图像呢?

生 1:因为我们已经知道这几个函数图像的形状——(师接)即它们的“长相”.

追问 3 函数图像的形状与性质归根结底是由什么决定的?

生 2:函数表达式.

问题 2 那么,如何根据函数表达式来研究函数图像的形状与性质呢?

问题 2.1 函数②的图像称为双曲线,说明

图像分为两支,为什么?

生3:因为 $x \neq 0$.

师:对,因为 x 有不能取到的值,所以图像就断开了.这说明函数图像是相连的还是断开的,主要看——(生接)自变量 x 的取值情况.

问题 2.2 在画函数③的图像时,你从其表达式中发现了它的哪些特性?

生3:图像有最低点,函数有最小值.

师:函数的最值也是我们经常关注的重要特性.

追问 你还发现了它的哪些特性?

生4:图像不间断.

师:很好!我们看到了图像不间断是因为自变量 x 可取任意实数.生4能活学活用.

生5:图像与 x 轴没有交点,都在 x 轴上方;与 y 轴有交点,坐标是 $(0,5)$.

师:生5关注了函数图像与坐标轴的交点情况.

生6:当 $x < -2$ 时, y 随 x 的增大而减小;当 $x > -2$ 时, y 随 x 的增大而增大.图像关于直线 $x = -2$ 对称.

师:生6关注了函数图像的增减情况和对称情况.

问题 2.3 受其启发,我们通常可从哪些角度来分析函数图像的性质呢?

生:图像的连续与间断情况、与坐标轴的交点情况、最值情况、增减性情况、图像的分布情况、对称情况,等等.

(在师生对话中,逐步完成下列板书(如图3))^[3].

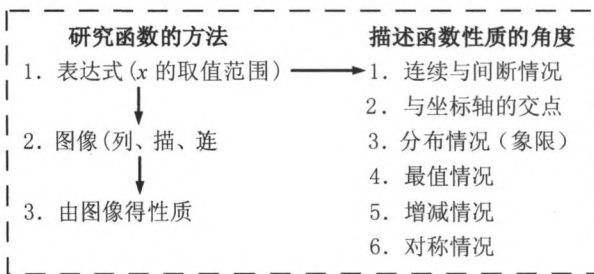


图3

师:函数的图像与其性质是密切相关的.反过来,把握函数的一些性质也可以帮助我们较为准确地发现图像的特征,从而画出它的示意图.

设计说明 立足学生已有经验,结合两个子问题,在老师的追问下,穿梭“数”“形”之间,分析、比较、整合描述函数性质的共同点和不同点,不经意中共同完成描述函数性质的几个角度,符合学生认知规律,为下面教学的展开作好铺垫.

2.3 简单应用,感悟内化

问题 3 回到开始的问题,该如何画函数 $y = \frac{6}{(x+2)^2+1}$ 的图像呢?

师:我们不妨按照刚才总结的几个角度,先来分析该函数图像的一些性质.

问题 3.1 该函数图像的连续与间断情况如何?

生:因为 x 为一切实数,所以图像是连续的.

(在直角平面坐标系中表示如图4对应部分,下同.)

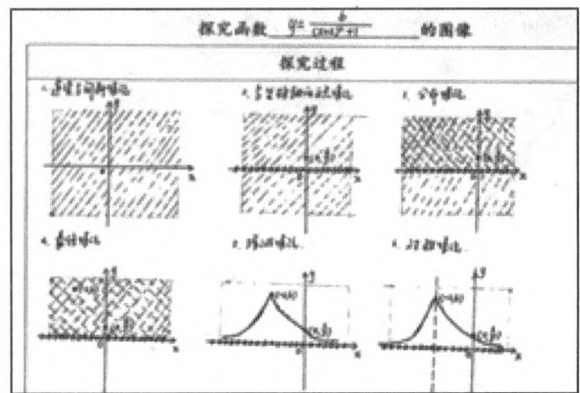


图4

问题 3.2 该函数图像与坐标轴的交点情况如何?

生:因为当 $x = 0$ 时, $y = \frac{6}{5}$, 所以过 $(0, \frac{6}{5})$; 又因为 $y \neq 0$ 时,所以它与 x 轴没有交点.

问题 3.3 该函数图像的分布情况如何?

生:因为 $(x+2)^2 + 1 > 0$, 所以 $y = \frac{6}{(x+2)^2+1} > 0$, 所以图像在 x 轴上方.

师:既然图像与 x 轴没有交点,又在 x 轴上方,你有什么想法?

生:无限逼近 x 轴,与反比例函数图像类似.

问题 3.4 该函数的最值情况如何?

见学生有困难,老师作了如下提示:用手依次

遮挡 $y = \frac{6}{(x+2)^2+1}$ 的分子 6、分母 $(x+2)^2+1$,

引导学生回归到两个熟悉的函数 $y = \frac{6}{x}$ 与 $y = (x+2)^2+1$ 来思考问题,渗透复合函数的思想.

师:结合这两个函数的图像,你觉得 $y = \frac{6}{(x+2)^2+1}$ 的最值情况如何?

生:因为当 $x = -2$ 时, $y = (x+2)^2+1$ 有最小值为 1,所以当 $x = -2$ 时, $y = \frac{6}{(x+2)^2+1}$ 有最大值为 6.

师:看来,新旧函数之间是相互作用和影响的.

问题 3.5 该函数的增减情况如何?

生:当 $x < -2$ 时, y 随 x 的增大而增大;当 $x > -2$ 时, y 随 x 的增大而减小.

师:很好,根据你的经验,你会连线了吗?伸出你的手,画画看.

(老师背对学生,与学生一起作手势演示.)

问题 3.6 该函数的对称情况如何?

生:因为函数 $y = (x+2)^2+1$ 的图像关于直线 $x = -2$ 对称,所以函数 $y = \frac{6}{(x+2)^2+1}$ 的图像也应该关于直线 $x = -2$ 对称.

师:函数的对称问题相对复杂,我们也可以在得到图像后,加以发现.

问题 3.7 在上述性质讨论的基础上,你会列表了吗?

生:类似于二次函数在 $x = -2$ 处左右对称取值.

问题 3.8 现在,你能试着画出函数 $y = \frac{6}{(x+2)^2+1}$ 的图像吗?

师:你画的图像示意图正确吗?请你用图形计算器验证(图 5).

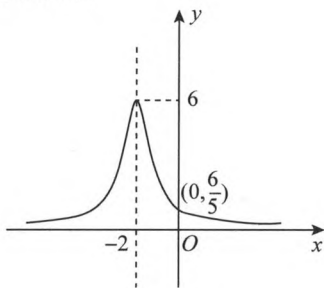


图 5

问题 3.9 你能在图像中找到函数 $y = \frac{6}{x}$ 、

$y = (x+2)^2+1$ 的影子吗? 请你在图像(图 5)中指出出来.

(学生对照图像,指画类似反比函数、二次函数图像的特征,进一步体会复合函数的思想.)

师:通过这个例题的分析,你有什么收获?

在师生对话中,依次完成课堂活动单,给出投影如下(图 6)

设计说明 依据描述函数性质几个角度的顺序,形成探究新函数图像特征的一般路径(通性通法);在函数的最大(小)值和增减性等困难处,借助 $y = \frac{6}{x}$ 、 $y = (x+2)^2+1$ 的图像,在师生、生生互动中,突破难点,提升学力;利用活动单,显性化思维过程,既可以倒逼图像的分布,又可以帮助学生理解取点和列表的理由;经历手指的指画过程,感受图像的走势,打通由“点”到“线”通道,再次倒逼图像的特征,丰富“由数想形”的经验.

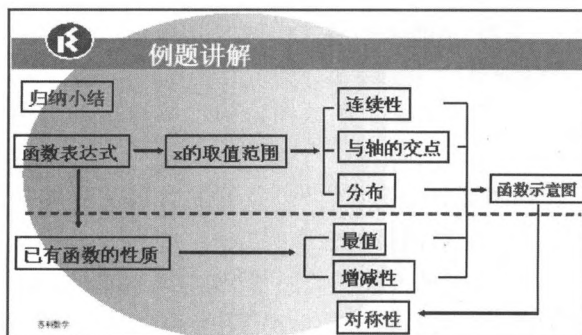


图 6

2.4 知识升华,灵活运用

请写出一个你想要探究的函数表达式.

(1)你能结合表达式猜想一、二个图像的特征吗?

(2)你能说出这些特征的合理性吗?

(3)请你用图形计算器画出这个函数的图像,并验证你的猜想;

(4)观察图像,你认为它还有那些性质?

设计说明 此处设计一个开放性问题,给学生一个时空,让学生从不同的视角,感受“由数想形”的合理性和必要性,结合多个问题探究方法的整合,进一步感受问题解决的顺序性、层次性,体会问题解决的一般路径(通性通法),彰显课堂的

生成性和课堂的张力.

2.5 课堂总结,课后探究

师:今天这节课,我们探究了画陌生函数图像的一般方法,在理性分析的基础上给出了一种通法(补全课题:以不变应万变——探究新函数的图像),相信大家都有所感悟.希望同学们在今后的

学习中,能用智慧的眼光去探寻解决问题的方法,培养自己理性思维的习惯.

探究作业 请你选择一个函数,对它的图像进行合理分析,在此基础上画出该函数图像的示意图,然后用图形计算器加以验证,并尽可能多地写出它的性质,最后完成探究报告.

探究报告

姓名	探究方式	自主探索 <input type="checkbox"/>	小组合作 <input type="checkbox"/>
探究主题	探究函数 _____ 的图像与性质	① $y = \frac{2x+10}{x+2}$ <input type="checkbox"/>	② $y = \frac{x^2+6}{x^2}$ <input type="checkbox"/>
		③ $y = x + \frac{1}{x}$ <input type="checkbox"/>	④ 其他函数 <input type="checkbox"/>
探究要求	1. 依据函数表达式对函数图像的特征作分析; 2. 画出函数图像的示意图; 3. 借助图形计算器验证你的结论; 4. 根据函数的图像写出函数的性质.		
探究过程			
函数性质			

设计说明 本节课教学内容虽源于学生已有经验,但远高于课标要求,问题的解决需要学生把握对所学知识内涵的深度理解,既是对学生学习能力的一个挑战,更是一个学习经验积累的过程,需要老师为学生创设一个问题情境,引领学生自主或合作探究,实现深度学习.

3 教学思考

3.1 教师站得高才能引领学生看得远

教师是学生学习的引路人,教师站的高度决定了学生视野.本节课上,如果单纯地立足于初中所学的函数基本方法和基本思路,学生探究会没有方向,探究起来也有困难,学生的收获可能也没有这样的处理方式来得丰满.所以,我们除了要钻研所教学段的教材外,还要对后续学习内容有一定的了解,并在不增加学生学习负担的前提下,经历师生对话,提炼已有经验与方法,并能用新经验、新方法解决新问题,这样的教学,既让学生

固化原有的知识和经验,又能让学生知晓新的经验和方法是从“哪里来”,又能到“哪里去”,并且还能知道“怎样去”的一般路径.

3.2 数学教学离不开问题的驱动

数学教学的本质应是不断地以提出问题并解决问题的方式来获取新的经验.本节课上,笔者从问题出发引入课题,并在解决了开始提出的问题后结束教学,前呼后应,浑然一体.为了解决该问题,其间又设计3个子问题,在每个子问题中又设计了一些问题串或进行了一些追问,正是基于符合学生认知规律的问题情境,启发和引导学生通过独立思考、动手实践、合作交流等多样化学习方式,课上学生的思维被充分调动起来,学生的智慧潜能被激发出来.通过实践,笔者认为基于问题驱动的探究活动易于提炼已有经验、易于提高学生认知、易于提高学生分析问题的能力、易于发挥学生主体作用等优点,值得提倡^[4]. (下转第61页)

对比,不应该仅仅是不同数学现象间的对比,教师还要注意引导学生关注同一数学现象在变化过程中的不变因素和可变因素.譬如对于数列 $x^n + x^{n-1}y + x^{n-2}y^2 + \dots + xy^{n-1} + y^n$ ($x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}$) 求和,学生往往从其结构应用等比数列的求和公式

得 $\frac{x^n \left(1 - \left(\frac{y}{x}\right)^n\right)}{1 - \frac{y}{x}}$,但这个答案存在的问题非常

多.求和是这个问题的要求,但这个数列是否是等比数列,需要考虑数列是否符合等比数列的概念,即要对 x, y 是否为 0 讨论.在 x, y 均不为 0 的情况下,显然适用等比数列的求和,但公比 $\frac{y}{x}$ 与 1 的讨论,涉及到等比数列求和公式不同的适用情况.

即使在公比 $\frac{y}{x} \neq 1$ 的条件下,这个数列求和中的项数是 n 还是 $n+1$ 需要认定,认为项数为 n 的同学,只是看到题目中幂的指数最大值是 n ,而没有进一步思考,而明确项数既是等比数列求和公式应用的关键,也是学生的易错点.在学生对问题探究的过程中,分析可变因素和不变因素的辩证关系是非常重要的,明晰可变因素的变化对问题解

决的影响,强化对可变因素的分析 and 讨论,培养了学生分类处理问题的能力,有助于提高学生思考问题全面性的能力.

课堂教学中的差错是不可避免的,相较于正确的单一,差错则更加丰富多彩,教师能否从差错中悟出道理,它既是对学生教学主体地位的体现,也是对自身教育智慧的度量.著名特级教师华应龙指出,“差错的价值并不止于差错本身,而在于师生从中获得新的启迪.”^[4] 启迪何来? 启迪来自于思考,在问题解决的过程中启发学生的哲学思考,将知识联系起来,从而弄清事物的含义,这既改变了教师的教学,也丰富学生的数学情感体验.

参考文献

- [1] 孙四周. “错误”是一种重要的教学资源[J]. 中国教育学刊, 2012(3): 79-81
- [2] 任晓松. 例谈高中数学教学中整体思维的应用[J]. 数学通报, 2019, 58(10): 47-49
- [3] 李善良. 数学概念学习中的错误分析[J]. 数学教育学报, 2002(8): 6-10
- [4] 华应龙. 聆听儿童思维真实的声音——我的融错教育观[J]. 人民教育, 2010(12): 43-46

(上接第 57 页)

3.3 “思维可视化”是破解难点的有效方法

华东师范大学刘濯源教授指出:“思维可视化”是指运用一系列图示技术把本来不可视的思维(包括:思考方法和思考路径)呈现出来,使其有清晰可见的过程.本节课中采用在坐标系中画阴影的方法来分析图像的分布,又在给出图像的最高点和对称轴后,破解“如何取点”、“如何列表”这一难题;采用“伸出你的手,画画看”和教者的形体示意,再用图形计算器加以验证,帮助学生理解“这样连线”的理由,破解“如何连线”这一难题;对照二个函数图像,结合函数表达式的特征,破解函数的最大值和增减性这一难题,这样的“可视化”教学过程,既可提升学生的学习能力,又能有效提升教学效能.

3.4 注重通性通法才是好的数学教学

章建跃博士认为:“通性”就是概念所反映的数学基本性质,“通法”就是概念所蕴含的思想方法^[5].本节课中,结合三大函数的图像,分析三类

图像特征形成的原因,理解三大函数之间的区别和联系,提炼描述一般函数性质的角度,再用这些角度步骤化、层次化、可视化去推测新函数图像的特征,倒逼图像的长相,形成探究函数特征的“通性通法”,这样的教学有助于学生把握研究问题的规律,探求数学的本质,提炼数学思想,提升能力水平,落实数学课程的育人功能,使学生真正从“长期利益”中得到好处.

参考文献

- [1] 王亮亮. 中考数学改革对初中数学教学的反拨作用[J]. 数学通报, 2016. 5, 10-14
- [2] 张长贵, 钱军先. 让知识在问题解决中深化 使能力在探究活动中提升[J]. 数学通报, 2016. 2, 20-24
- [3] 王成刚, 王克亮. 数学课堂教学中问题驱动的实施策略[J]. 教学与管理, 2019. 10, 60-62
- [4] 王成刚, 王克亮. 基于问题驱动的单元复习的实践[J]. 数学通报, 2018. 9, 50-52
- [5] 章建跃. 章建跃数学教育随想录[M]. 浙江: 浙江教育出版社, 2019