

凝练核心素养 培育高阶思维

——“对数函数及其性质”教学设计与教学反思

洪兵 (江苏省如东高级中学 226400)



作者简介:洪兵,江苏如东人,1997年毕业于苏州大学,2019年评为中学正高级教师,现就职于江苏省如东高级中学。曾获江苏省优秀工作者、宿迁市名教师、南通市学科带头人、南通市优秀班主任等荣誉称号,多次获省市优课一等奖,主持或参与多项省市规划办课题研究。近五年在核心期刊上发表《高中数学教师微专题研究的开展》等三篇论文,撰写了《高中教学微专题研究促进教师专业成长》《高中数学教师教育教学发展研究》两部专著。在近二十届的高三毕业班教学中形成了“严谨扎实并举,灵动激情并重”的教学风格,坚持“生为本,学为上”的课堂教学理念,践行立德树人,培育核心素养。

1 基本情况

1.1 授课对象

授课对象是四星级重点高中学生,学生基础较扎实,有指数函数的学习基础,具有初步的数形处理能力。

1.2 教材分析

授课内容是《普通高中数学教科书·必修第一册》(苏教版)第六单元“6.3 对数函数”第1课时。函数是高中数学的主体内容(变量数学)的主要研究对象之一,是中学数学的重点知识。研究函数的一般理论和方法、用函数思想方法解决实际问题函数教学的主要目标。因有较好的初中基础,学生对幂函数、指数函数的学习可能较为轻松。对数函数中的参数与变量对对数函数的影响比较复杂,较难进行直观想象,因此有利于学生数学高阶思维的培育。目前新高考加大了对数学文化的考查,对数的运算和性质在数学文化方面体现得非常充分,有助于培养学生分析、归纳、抽象等思维能力。

按课标要求,必修第一册“对数函数”教学课时

为3个学时,本节课为第1课时。对数函数是学生在学过正比例函数、一次函数、二次函数、反比例函数和指数函数的基础上进一步学习的一种新函数,对对数函数概念的理解、图象与性质的掌握和应用有利于强化学生对初等函数系统性的认识,有利于进一步加深对函数思想方法的理解,也为后续进一步探究对数函数的应用及指数函数、对数函数的综合应用起到了承上启下的作用。

知识目标 理解对数函数的定义,掌握对数函数的图象和性质;会求与对数函数有关的函数的定义域;初步应用对数函数的性质。

能力目标 通过对底的讨论,进一步认识分类讨论的思想,体会由特殊到一般的数学思想;通过例题、习题的解决,领悟化归思想在解决问题中的作用;通过超越函数对数函数的研究,产生在较高认知水平层次上的心智活动,提升认知能力和创新能力,发展高阶思维。

素养目标 在参与对数函数探讨过程中感受数学,体验数学探索的过程,提高分析、归纳、抽象等思

参考文献

- [1] 汪晓勤. HPM的若干研究与展望[J]. 中学数学月刊, 2012(2): 1-5.
- [2] 汪晓勤. HPM: 数学史与数学教育[M]. 北京: 科学出版社, 2017: i-iii.
- [3] Fauvel J, van Maanen J. History in Mathematics Education[M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000: xi-xviii.
- [4] 汪晓勤, 沈中宇. 数学史与数学教育——理论与、实践与案例[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2020: 1-2.
- [5] 汪晓勤, 张小明. HPM研究的内容与方法[J]. 数学教育学报, 2006, 15(1): 16-18.
- [6] 王鑫, 岳增成, 汪晓勤. HPM研究的框架与进展[J]. 数学通报, 2021, 60(6): 7-12, 19.
- [7] 岳增成. 中国HPM发展之路[J]. 教学月刊小学版(数学), 2019(11): 6-10.

维能力,以思维提升为突破口,发展数学核心素养.

教学重点 理解对数函数的定义,掌握对数函数图象和性质.

教学难点 底数 a 对函数值变化的影响及对数函数性质的应用.

2 教学过程设计

2.1 创设情境 复习引入

问题 某种病毒在人与人接触时感染,开始有1个人感染,若不予以隔离控制,由1个人传染给2个,2个人传染给4个……1个感染病毒的人传染 x 次后,感染病毒的总人数是多少?

思考:某防疫专家预测,若采取隔离或减少接触等控制方法,将感染病毒的总人数控制在 y 人以内.如何确定传染次数?(对数可以缩短计算时间,在时效上等于把天文学家的寿命延长了许多倍——拉普拉斯)

师生研究:设1个感染病毒的人传染 x 次后,感染病毒的总人数为 y ,即 $y=2^x$,知道 x 的值(输入值是传染的次数),就能求出 y 的值(输出值是感染病毒的总人数).

在这里, x 与 y 之间存在函数关系 $y=2^x$,反之,写成对数式为 $x=\log_2 y$ (图1).

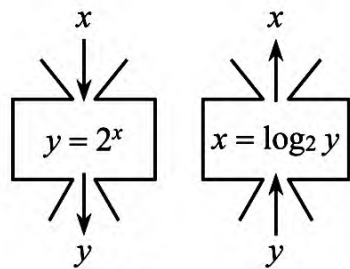


图1

设计意图 (1)回顾指数与对数的相互转

化 $a^b=N \Leftrightarrow \log_a N=b$,检测学生对指数式和对数式互化的学习情况,指数与对数互换的逆向运算属于高阶思维的体现,对学生高阶思维培育起到了较好的作用;(2)加强指数对数运算,重视数学文化研究,激发学生的好奇心,开拓学生的知识面,自然引出对数函数的概念,符合新高考要求;(3)让学生体会病毒感染之快,被病毒感染的人数成爆炸式增长,加强卫生防疫意识,积极配合卫生防疫工作.

2.2 探索新知 形成概念

1. 归纳出对数函数的概念

一般地,我们把形如 $y=\log_a x(a>0$ 且 $a \neq 1)$ 的函数叫做对数函数,其中 x 是自变量,定义域为 $(0, +\infty)$.

思考:为什么 $a>0$ 且 $a \neq 1$? 为什么 $x>0$?

设计意图 (1)抽象出对数函数的一般形式,让学生感受从特殊到一般的数学思维方法,发展学生的抽象思维能力;(2)引导学生对对数函数概念中参数的意义进行研讨,培养学生的交流合作能力.

2. 判断下列函数是否为对数函数:

(1) $y=\log_2 x$; (2) $y=\log_2 \frac{x}{5}$;

(3) $y=2\log_2 x$; (4) $y=\log_x 2$.

3. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\log_a(x^2)$; (2) $y=\log_a(3-x)$.

设计意图 让学生对对数函数的概念有更深刻的理解,渗透整体化归思想.

2.3 观察图象 探究性质

1. 用描点法画出下列两个函数的图象:

(1) $y=\log_2 x$; (2) $y=\log_{\frac{1}{2}} x$.

思考:对数函数的底数对函数的图象有何影响? 这两个函数的底数有什么关系?

变式研究 画出下列两组函数的图象:

(1) $y=\log_3 x$ 和 $y=\log_{\frac{1}{3}} x$;

(2) $y=\log_4 x$ 和 $y=\log_{\frac{1}{4}} x$.

思考:判断哪些函数是增函数,哪些函数是减函数,它们的底数有什么共同特征?

设计意图 (1)利用体验学习教学法,让学生自己作图、自己比较、自己归纳,体验知识的产生及形成过程,逐步培养学生的抽象概括能力,凝练数学核心素养;(2)学生在这种整体性、关联性的学习中,能够真正做到学有所悟,这正是着眼于数学知识整体、着眼于数学知识关联的高阶思维培育.

2. 由对数函数图象,探究对数函数的性质

	$a > 1$	$0 < a < 1$
图 象		
定义域	$x \in (0, +\infty)$	
值 域	\mathbf{R}	
过定点(1, 0)		
函数值特点	在 $x \in (0, +\infty)$ 上为增函数; 当 $x > 1$ 时, $y > 0$; 当 $0 < x < 1$ 时 $y < 0$	在 $x \in (0, +\infty)$ 上为减函数; 当 $x > 1$ 时, $y < 0$; 当 $0 < x < 1$ 时 $y > 0$

2.4 数学应用 完善认知

思考:在同一坐标系中观察六个函数的图象,每一组中的两个函数的图象有何关系? 三组中前面的三个函数(对数底数 $a > 1$)的图象有何关系? 三组中后面的三个函数(对数底数 $0 < a < 1$)的图象有何关系?

1. 探究下列函数的图象位置(图2),比较 a, b, c, d 的大小关系.

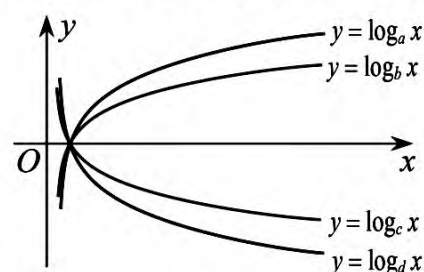


图2

2. 比较下列各题中两个数值的大小:

- (1) $\log_2 3.4$ 和 $\log_2 8.5$;
- (2) $\log_a 5.1$ 和 $\log_a 5.9$;
- (3) $\log_5 6$ 和 $\log_6 5$;
- (4) $\log_2 5$ 和 $\log_3 5$.

设计意图 (1) 比较大小: 介值法、单调性、图象法; (2) 对数比较大小三种类型: 同底不同真、同真不同底、底真都不同; (3) 第(4)题较为抽象, 不能用函数 $y = \log_x 5$ 来研究, 必须利用其他函数的图象进行研究, 达到提升呈现问题解决、推理与决策、批判性思维等高阶思维品质.

2.5 归纳总结 布置作业

(1) 本节课我们学习了: 1) 引入新知一定义(底数、真数有范围), 感受从特殊到一般的数学思想; 2) 探究性质两图象(共异性源于 a); 3) 由图象研究对数函数的性质, 感悟分类讨论思想, 求含对数的函数定义域, 体现整体思想; 4) 对数函数的位置由底数决定, 体现特值思想.

(2) 布置作业: 1) 必做作业: 课本第74页第7题和第8题; 2) 选做作业(课后探究): 指数函数和对数函数之间有怎样的关系? 环节2.4中取特值 $x = 2$, 如何比较 a, b, c, d 的大小关系?

3 回顾与反思

3.1 教学设计的立意

当下的数学教学已经从“知识”时代走向“核心素养”时代, 数学学科核心素养培育反映了高中数学教学的魂, 课堂教学应有意识地在数学知识和技能教学中, 体现和培育学生的核心素养, 切实提高教学质量. 对数运算与对数函数知识的学习与后续的几何、三角、向量等关系联系不太密切, 很多教师教学时匆匆了事, 不够重视, 学生只能机械记忆, 知识遗忘快. 这种课堂下的数学思想渗透不到位, 数学思维能力得不到提升, 更谈不上高阶思维培育. 本节课对对数函数与指数函数间关于直线 $y = x$ 对称关系的转换思维、对数式大小的比较等要求也很高, 应该充分地利用好对数函数的探究过程, 发展运算能力和推理能力, 不能急功近利^[1], 应以思维为突破口, 使得课堂教学走向深入、走向理性和走向高效. 着力于探索发展学生数学核心素养的实践范式、发展学生高阶思维, 才是核心素养视域下数学教学的应然追求.

3.2 教学反思

(1) 精心创设课堂情境, 侧重文化浸润, 强化育人导向

对数运算是指数运算的逆运算, 可以提高计算

效率; 对数函数曲线与指数爆炸式曲线变化趋势有较大区别, 在生活中可以用它们来模拟变量之间的关系, 很好地解决社会问题中蕴含的数学问题. 数学是人类的一种文化, 注重文化浸润, 可以通过一个个基于生活情境的主题或项目中的体验、探究和发现来构造自己的知识, 发展自己的能力, 养成自己的品格.

生活是数学赖以生存和发展的源泉. 病毒传染、细胞分裂等社会热点问题, 学生对此既兴奋又陌生, 让学生会用数学的眼光观察现实世界.

(2) 增强课堂探究意识, 发展学生思维, 培育高阶思维

本节课通过类比探究、变式探究、归纳探究等多种手段, 使学生学会类比学习、自主学习、合作学习, 充分发挥学生的主体作用, 改变传统的“我讲你听”单一讲授式教学模式. 教学过程中, 教师感觉到提出的问题过于深奥, 学生探究的方向不够明确, 可能达不到预期的目标, 作出调整后, 注重分层设置问题, 让学生跳一跳可以够得到, 体现高阶思维学习特点, 训练学生高阶思维意识. 本节课的探究过程中学生还不够自由, 表现欲望不够强烈, 师生的配合不够默契. 探究不能流于形式, 在每次探究前先明确探究目的、明确重点需要研究的问题是什么, 使讨论更具有针对性, 形成高阶思维学习模式.

教师应增强课堂探究意识, 培养学生的观察能力、逻辑思维能力、归纳能力、分析探究能力和解决实际问题的能力, 培养学生认真倾听、接受别人意见的优良品质, 发展学生高阶思维, 培养学生高阶思维能力.

(3) 关注数学思想渗透, 积累思维经验, 凝练核心素养

利用几个特殊函数的图象进行直观观察, 归纳出对数函数的图象及其性质, 充分体现数形结合思想方法的渗透; 结合对数函数的底数变化对对数函数图象与性质的影响, 分类讨论思想的运用得以充分体现, 提升了学生思维的严谨性; 借助对数式大小的比较问题, 渗透转化化归思想. 探究解决问题的方法和途径、探索对知识的加工和批判、强化思维训练和能力培养, 这些是积累思维经验的过程, 也是凝练数学核心素养的必经之路.

参考文献

- [1] 姚小琴. 高阶思维: “核心素养”导向的数学教学[J]. 数学教学通讯, 2018(10): 16-17.