江苏省仪征中学高三数学期中热身训练（10）

一、填空题

1、函数 $f(x)=\sqrt{\lg(3-x)}$ 的定义域为_______________

2、已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{2^x}-2^x$，则满足 $f(x^2-5x)+f(6)>0$ 的实数 x 的取值范围是_________

3、在 ΔABC 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，若 $C=\dfrac{\pi}{3},b=\sqrt{6},c=3,$，则 $A=$_______.

4、已知函数 $f(x)=\begin{cases}\ln x-2, & x>0\\ x+a, & x\le 0\end{cases}$，若 $f(f(e))=2a$，则实数 a=_______.

5、将直线 $y=2x$ 绕原点逆时针旋转 $\dfrac{\pi}{4}$，则所得直线的斜率为__________.

6、已知函数 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=x^2-4x$，则不等式 $f(x)>x$ 的解集为________.

7、若直线 $kx-y-k=0$ 与曲线 $y=e^x$ (e 是自然对数的底数)相切，则实数 k=____

8、已知正实数 x,y 满足 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1$，则 $\dfrac{3x}{x-1}+\dfrac{4y}{y-1}$ 的最小值为_______.

9、ΔABC 中，$AB=3,AC=4,BC=5$，O 点是内心，且 $\overrightarrow{AO}=\lambda_1\overrightarrow{AB}+\lambda_2\overrightarrow{BC}$，

则 $\lambda_1+\lambda_2=$ __▲___.

10、如图，点 A,F 分别是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的上顶点和右焦点，直线 AF 与椭圆交于另一点 B，过中心 O 作直线 AF 的平行线交椭圆于 C,D 两点，若 $\dfrac{CD}{AB}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，则椭圆的离心率为___▲___.

11、平面直角坐标系 xOy 中，点 P 在 x 轴上，从点 P 向圆 C_1：$x^2+(y-3)^2=5$ 引切线，切线长为 d_1，从点 P 向圆 C_2：$(x-5)^2+(y+4)^2=7$ 引切线，切线长为 d_2，则 d_1+d_2 的最小值为_____.

12、在平面凸四边形 $ABCD$ 中，$AB=2\sqrt{2}$，$CD=3$，点 E 满足 $\overrightarrow{DE}=2\overrightarrow{EC}$，且 $AE=BE=2$．若 $\overrightarrow{AE}\bullet\overrightarrow{EC}=\dfrac{8}{5}$，则 $\overrightarrow{AD}\bullet\overrightarrow{BC}$ 的值为__________.

二、解答题

13、已知函数 $f(x)=\sin(x+\frac{7}{4}\pi)+\cos(x-\frac{3}{4}\pi), x\in R$

（1）求函数 $f(x)$ 的最小正周期和值域；

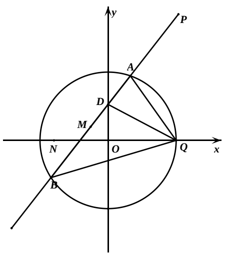
（2）若函数 $f(x)$ 的图象过点 $(\alpha,\frac{6}{5}), \frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{3\pi}{4}$，求 $f(\frac{\pi}{4}+\alpha)$ 的值。

14、已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2,长轴的一个端点与短轴两个端点组成等边三角形的三个顶点,直线 l 经过点 F_2,倾斜角为 45°,与椭圆交于 A、B 两点.

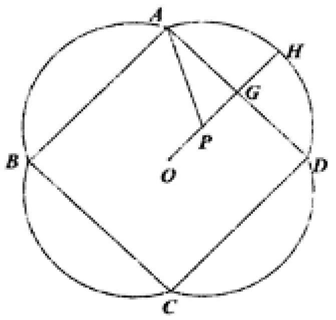
(Ⅰ)若 $|F_1F_2|=2\sqrt{2}$,求椭圆方程;

(Ⅱ)对(Ⅰ)中椭圆,求 ΔABF_1 的面积;

(Ⅲ)M 是椭圆上任意一点,若存在实数 λ, μ,使得 $\overrightarrow{OM}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$,试确定 λ, μ 的关系式.



15、如图是一幅招贴画的示意图，其中 ABCD 是边长为 $2a$ 的正方形，周围是四个全等的弓形。已知 O 为正方形的中心，G 为 AD 的中点，点 P 在直线 OG 上，弧 AD 是以 P 为圆心、PA 为半径的圆的一部分，OG 的延长线交弧 AD 于点 H。设弧 AD 的长为 l，$\angle APH=\theta, \theta\in(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4})$。（1）求 l 关于 θ 的函数关系式；（2）定义比值 $\frac{OP}{l}$ 为招贴画的优美系数，当优美系数最大时，招贴画最优美。证明：当角 θ 满足：$\theta=\tan(\theta-\frac{\pi}{4})$ 时，招贴画最优美。



附加：

1、在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $x+y-2=0$ 在矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & a\\ b & 2\end{bmatrix}$ 对应的变换作用下得到的直线仍为 $x+y-2=0$，求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

2、在某次活动中，有 5 名幸运之星．这 5 名幸运之星可获得 A 、 B 两种奖品中的一种，并规定：每个人通过抛掷一枚质地均匀的骰子决定自己最终获得哪一种奖品(骰子的六个面上的点数分别为 1 点、2 点、3 点、4 点、5 点、6 点)，抛掷点数小于 3 的获得 A 奖品，抛掷点数不小于 3 的获得 B 奖品．

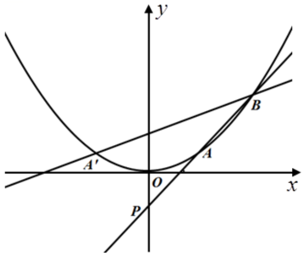
（1）求这 5 名幸运之星中获得 A 奖品的人数大于获得 B 奖品的人数的概率；

（2）设 X 、 Y 分别为获得 A 、 B 两种奖品的人数，并记 $\xi=\left|X-Y\right|$，求随机变量 ξ 的分布列及数学期望．

3、已知抛物线 C：$x^2=2py(p>0)$ 过点 $(2,1)$，直线 l 过点 $P(0,-1)$ 与抛物 线 C 交于 A,B 两点.点 A 关于 y 轴的对称点为 A' ,连接 $A'B$.

（1）求抛物线 C 的标准方程；

（2）问直线 $A'B$ 是否过定点？若是，求出定点坐标；若不是，请请说明理由.



参考答案：

1、（－∞，2]； 2、（2，3）； 3、$\frac{5\pi}{12}$ 4、－1； 5、-3 6、 $(-5,0)\cup(5，+\infty)$

7、 e^2 8、 7+4$\sqrt{3}$ 9、$\frac{5}{6}$ 10、$\frac{1}{2}$ 11、 5$\sqrt{2}$ 12、2

13、（1）$\because f(x)=\sin x\cos\frac{7\pi}{4}+\cos x\sin\frac{7\pi}{4}+\cos x\cos\frac{3\pi}{4}+\sin x\sin\frac{3\pi}{4}$

$=\sqrt{2}\sin x-\sqrt{2}\cos x=2\sin(x-\frac{\pi}{4})$ ……… 2 分

$\therefore$函数的最小正周期为2π，值域为$\{y\mid -2\leqslant y\leqslant 2\}$ ……… 5 分

⑵依题意得：$2\sin(\alpha-\frac{\pi}{2})=\frac{6}{5}$，$\sin(\alpha-\frac{\pi}{4})=\frac{3}{5}$ ……… 7 分

$\because \frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{3\pi}{4}$，$\therefore 0<\alpha-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}$

$\therefore \cos(\alpha-\frac{\pi}{4})=\sqrt{1-\sin^2(\alpha-\frac{\pi}{4})}=\frac{4}{5}$ ……… 9 分

$\therefore f(\frac{\pi}{4}+\alpha)=2\sin\alpha=2\sin[(\alpha-\frac{\pi}{4})+\frac{\pi}{4}]$

$=2[\sin(\alpha-\frac{\pi}{4})\cos\frac{\pi}{4}+\cos(\alpha-\frac{\pi}{4})\sin\frac{\pi}{4}]$ ……… 12 分

$=2(\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{7\sqrt{2}}{5}$. ……… 14 分

14、(Ⅰ)由已知,可得$c=\sqrt{2}$,$a=\sqrt{3}b$, $\because a^2=b^2+c^2$,$\therefore a=\sqrt{3}$,$b=1$,

$\therefore \frac{x^2}{3}+y^2=1$

(Ⅱ)设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,直线$l:y=x-\sqrt{2}$,

代入椭圆方程得$4x^2-6\sqrt{2}\,x+3=0$,$x_1+x_2=\frac{3\sqrt{2}}{2}$,$x_1x_2=\frac{3}{4}$,

$|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{6}}{2}$,$|y_1-y_2|=|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{6}}{2}$,$\therefore S_\Delta=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{6}}{2}=\sqrt{3}$

(III)由已知椭圆方程为$x^2+3y^2=3b^2$ ………①

右焦点F的坐标为$(\sqrt{2}b,0)$,直线AB所在直线方程为$y=x-\sqrt{2}b$ …………②

由①②得:$4x^2-6\sqrt{2}bx+3b^2=0$.

设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则$x_1+x_2=\frac{3\sqrt{2}}{2}b$,$x_1x_2=\frac{3b^2}{4}$,

设$M(x,y)$,由$\overrightarrow{OM}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$得,$x=\lambda x_1+\mu x_2$,$y=\lambda y_1+\mu y_2$,$\because$点$M$在椭圆上,

$\therefore (\lambda x_1+\mu x_2)^2+3(\lambda y_1+\mu y_2)^2=3b^2$,整理得:

$\lambda^2(x_1^2+3y_1^2)+\mu^2(x_2^2+3y_2^2)+2\lambda\mu(x_1x_2+3y_1y_2)=3b^2$,

$x_1x_2+3y_1y_2=x_1x_2+3(x_1-\sqrt{2}b)(x_2-\sqrt{2}b)=4x_1x_2-3\sqrt{2}b(x_1+x_2)+6b^2=0$ ……③

又点 A,B 在椭圆上,故 $x_1^2+3y_1^2=3b^2$ ……④

$x_2^2+3y_2^2=3b^2$ ……⑤

由③④⑤式得 $\lambda^2+\mu^2=1$

15

解：(1)当 $\theta\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$ 时，点 P 在线段 OG 上，$AP=\frac{a}{\sin\theta}$；当 $\theta\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4})$ 时，点 P 在线段 GH 上，$AP=\frac{a}{\sin(\pi-\theta)}=\frac{a}{\sin\theta}$；当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，$AP=a$.

综上所述，$AP=\frac{a}{\sin\theta}$，$\theta\in(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4})$. ………………………………………………………… 2 分

所以，弧 AD 的长 $l=AP\cdot 2\theta=\frac{2a\theta}{\sin\theta}$，故所求函数关系式为 $l=\frac{2a\theta}{\sin\theta}$，$\theta\in(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4})$. …4 分

(2)当 $\theta\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$ 时，$OP=OG-PG=a-\frac{a}{\tan\theta}=a-\frac{a\cos\theta}{\sin\theta}$；当 $\theta\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4})$ 时，$OP=OG+GH=a+\frac{a}{\tan(\pi-\theta)}=a-\frac{a}{\tan\theta}=a-\frac{a\cos\theta}{\sin\theta}$；当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，$OP=a$.

所以 $OP=a-\frac{a\cos\theta}{\sin\theta}$，$\theta\in(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4})$. ………………………………………………………… 6 分

从而，$\frac{OP}{l}=\frac{\sin\theta-\cos\theta}{2\theta}$. ………………………………………………………………… 8 分

记 $f(\theta)=\frac{\sin\theta-\cos\theta}{2\theta}$，$\theta\in(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4})$.

则 $f'(\theta)=\frac{\theta(\cos\theta+\sin\theta)-(\sin\theta-\cos\theta)}{2\theta^2}$.

令 $f'(\theta)=0$，得 $\theta(\cos\theta+\sin\theta)=\sin\theta-\cos\theta$. ………………………………………… 10 分

因为 $\theta\in(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4})$，所以 $\cos\theta+\sin\theta\neq 0$，从而 $\theta=\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}$.

显然 $\theta\neq\frac{\pi}{2}$，所以 $\theta=\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}=\frac{\tan\theta-1}{\tan\theta+1}=\tan(\theta-\frac{\pi}{4})$. ……………………………… 12 分

记满足 $\theta=\tan(\theta-\frac{\pi}{4})$ 的 $\theta=\theta_0$，下面证明 θ_0 是函数 $f(\theta)$ 的极值点.

附加：

1、设 $P(x,\ y)$ 是直线 $x+y-2=0$ 上任意一点，其在矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & a\\ b & 2\end{bmatrix}$ 对应的变换下

得到 $\begin{bmatrix}1 & a\\ b & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+ay\\ bx+2y\end{bmatrix}$ 仍在直线上，

所以得 $x+ay+bx+2y-2=0$，…………………………………………………………4 分

与 $x+y-2=0$ 比较得 $\begin{cases}1+b=1\\ a+2=1\end{cases}$，解得 $\begin{cases}b=0\\ a=-1\end{cases}$，故 $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$，　………8 分

求得逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$. ……………………………………………10 分

2、这 5 名幸运之星中，每人获得 A 奖品的概率为 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$，B 奖品的概率为 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

（1）要获得 A 奖品的人数大于获得 B 奖品的人数，则 A 奖品的人数可能为 $3,4,5$，则

则所求概率为 $P=C_5^3(\frac{1}{3})^3(\frac{2}{3})^2+C_5^4(\frac{1}{3})^4(\frac{2}{3})+C_5^5(\frac{1}{3})^5=\frac{17}{81}$.

（2）ξ 的可能取值为 $1,3,5$，且 $P(\xi=1)=C_5^3(\frac{1}{3})^3(\frac{2}{3})^2+C_5^2(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})^3=\frac{40}{81}$，

$P(\xi=3)=C_5^4(\frac{1}{3})^4(\frac{2}{3})+C_5^1(\frac{1}{3})(\frac{2}{3})^4=\frac{10}{27}$，

$P(\xi=5)=C_5^0(\frac{2}{3})^5+C_5^5(\frac{1}{3})^5=\frac{11}{81}$，　　所以 ξ 的分布列是：

ξ	1	3	5
P	$\frac{40}{81}$	$\frac{10}{27}$	$\frac{11}{81}$

故随机变量 ξ 的数学期望 $E\xi=1\times\frac{40}{81}+3\times\frac{10}{27}+5\times\frac{11}{81}=\frac{185}{81}$.

3、解：（1）将点 $(2,1)$ 代入抛物线 C：$x^2=2py$ 的方程得，$p=2$

所以，抛物线 C 的标准方程为 $x^2=4y$ ……………………4 分

（2）设直线 l 的方程为 $y=kx-1$，又设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $A'(-x_1,y_1)$

由 $\begin{cases}y=\frac{1}{4}x^2\\ y=kx-1\end{cases}$ 得 $x^2-4kx+4=0$

则 $\Delta=16k^2-16>0, x_1\cdot x_2=4, x_1+x_2=4k$

所以 $k_{A'B}=\frac{y_2-y_1}{x_2-(-x_1)}=\frac{\frac{x_2^{\ 2}}{4}-\frac{x_1^{\ 2}}{4}}{x_1+x_2}=\frac{x_2-x_1}{4}$

于是直线 $A'B$ 的方程为 $y-\frac{x_2{}^2}{4}=\frac{x_2-x_1}{4}(x-x_2)$ ……………………8 分

所以， $y=\frac{x_2-x_1}{4}(x-x_2)+\frac{x_2{}^2}{4}=\frac{x_2-x_1}{4}x+1$

当 $x=0$ 时， $y=1$

所以直线 $A'B$ 过定点 $(0,1)$. ……………………10 分