# 江苏省仪征中学 2018-2019 学年第一学期高三数学周三练习（4）理科

2018. 9. 26

**范围：集合与逻辑、函数与导数、三角函数、平面向量、直线与圆**

**一. 填空题：本大题共 14 小题，每小题 5 分，计 70 分. 不需写出解答过程，请把答案写在答题纸的指定位置上.**

1．已知集合 $A=\{1,3\}$， $B=\{3,\log_2 m\}$，若 $A\cup B=\{1,2,3\}$，则 $m=$________.

2．函数 $y=\sqrt{\log_{0.2}x}$ 的定义域为__________.

3．命题 $p:\exists x_0\in R$， $x_0{}^2-2x_0+1\le 0$ 是_________命题（选填"真"或"假"）.

4．函数 $f(x)=\sin\dfrac{\pi-x}{2}\sin\dfrac{x}{2}$ 的最小正周期为________.

5．过原点且倾斜角为 $60°$ 的直线被圆 $x^2+y^2-4y=0$ 所截得的弦长为 _______.

6．过点 $C(3,4)$ 且与 $x$ 轴， $y$ 轴都相切的两个圆的半径分别为 $r_1,r_2$，则 $r_1r_2=$_____________.

7．已知直线 $x-y+1=0$ 与曲线 $y=\ln x-a$ 相切，则 $a$ 的值为________.

8. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\log_{\frac{1}{2}}x, & x\ge 2\\ 2a^x-3a, & x<2\end{cases}$（其中 $a>0$ 且 $a\ne 1$）的值域为R，则实数 $a$ 的取值范围为________.

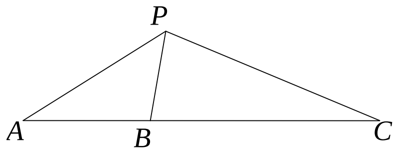
9．若圆 $(x-3)^2+(y+5)^2=r^2$ 上有且只有两个点到直线 $l:4x-3y=2$ 的距离等于 1，则半径 $r$ 的取值范围是________.

10．在平面直角坐标系 $xOy$ 中，过点 $P(5，3)$ 作直线 $l$ 与圆 $x^2+y^2=4$ 相交于 $A$，$B$ 两点，若 $OA\perp OB$，则直线 $l$ 的斜率为______.

11．已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}+1$（ e 为自然对数的底数），若 $f(2x-1)+f(4-x^2)>2$，则实数 $x$ 的取值范围为__________.

12．已知圆 $C$：$(x-2)^2+y^2=4$，点 $P$ 在直线 $l$：$y=x+2$ 上，若圆 $C$ 上存在两点 A、B 使得 $\overrightarrow{PA}=3\overrightarrow{PB}$，则点 $P$ 的横坐标的取值范围是___.

13．如图，$A,B,C$ 是直线 $l$ 上的三点，$P$ 是直线 $l$ 外一点，已知 $AB=\frac{1}{2}BC=1$，$\angle CPB=90^{\circ}$，$\tan\angle APB=\frac{4}{3}$．则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=$__________．




14．已知 $A,B$ 为直线 $l$：$y=-x$ 上两动点，且 $AB=4$，圆 $C$：$x^2+y^2-6x-6y+2=0$，圆 $C$ 上存在点 $P$，使 $PA^2+PB^2=10$，则线段 $AB$ 中点 $M$ 的横坐标取值范围为__________．

**二. 解答题：本大题共 6 小题，计 90 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤，请把答案写在答题纸的指定区域内.**

15. 已知命题 $p$：$x_1$ 和 $x_2$ 是方程 $x^2-mx$-2=0 的两个实根，不等式 $a^2-5a-3\geq|x_1-x_2|$ 对任意 $m\in[-1,1]$ 恒成立；命题 $q$：不等式 $ax^2+2x-1>0$ 有解，若命题 $p$ 是真命题，命题 $q$ 是假命题，求实数 $a$ 的取值范围.

16. 三角形 ABC 的对边分别为 $a,b,c$，满足 $\frac{a}{\cos C\sin B}=\frac{b}{\sin B}+\frac{c}{\cos C}$．

（1）求角 $B$；（2）若 $\cos A=\frac{3}{5}$，试求 $\cos C$ 的值.

17. 已知圆$C$：$x^2+y^2+2x-4y+3=0$.

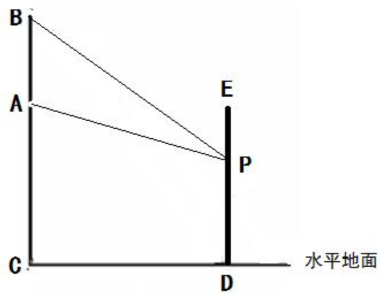
（1）若圆$C$的切线在$x$轴、$y$轴上的截距相等，求切线方程；

（2）从圆$C$外一点$P(x_1,y_1)$向该圆引一条切线，切点为$M$且有$|PM|=|PO|$（$O$为原点），求使$|PM|$取得最小值时点$P$的坐标.

18. 南京市江北新区计划在一个竖直长度为20米的瀑布$AB$正前方修建一座观光电梯$DE$。如图所示，瀑布底部$A$距离水平地面的高度$AC$为60米，电梯上设有一个安全拍照口$P$，$P$上升的最大高度为60米。设$P$距离水平地面的高度为$a$米，$P$处拍照瀑布的视角$\angle BPA$为$\theta$。摄影爱好者发现，要使照片清晰，视角$\theta$不能小于$30°$.

（1）当$a$=50米时，视角$\theta$恰好为$30°$，求电梯和山脚的水平距离$CD$；

（2）要使电梯拍照口$P$的高度$a$在52米及以上时，拍出的照片均清晰，请求出电梯和山脚的水平距离$CD$的取值范围.

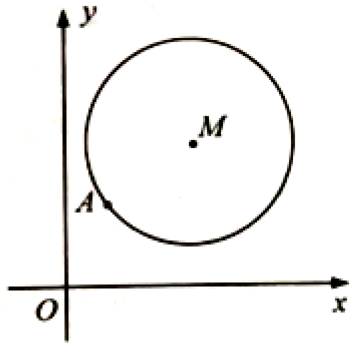


19. 如图，在平面直角坐标系 xoy 中，已知以 M 为圆心的圆 M: $x^2+y^2-12x-14y+60=0$ 及其上一点 A(2，4).

（1）设圆 N 与 x 轴相切，与圆 M 外切，且圆心 N 在直线 x=6 上，求圆 N 的标准方程；

（2）设平行于 OA 的直线 l 与圆 M 相交于 B、C 两点，且 BC=OA，求直线 l 的方程；

（3）设点 T（t,0）满足：存在圆 M 上的两点 P 和 Q,使得 $\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TP}=\overrightarrow{TQ}$,求实数 t 的取值范围.




20. 已知函数 $f(x)=ax+\dfrac{a-2}{x}+2-2a\ (a>0)$.

（1）当 $a=1$时，求函数 $f(x)$ 在点 $(2, f(2))$ 处的切线方程；

（2）求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（3）若 $f(x)\geqslant 2\ln x$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立，求 $a$ 的取值范围.

# 周三练习（4）理科参考答案

1． 4　　2． $(0,1]$　　3．真　　4． $2\pi$　　5． $2\sqrt{3}$　　6． 25　　7． $-2$

8．$[\frac{1}{2},1)$　　9. (4,6)　　10．$1或\frac{7}{23}$　　11．$(-1,3)$　　12．$\left[-2,2\right]$　　13．$-\frac{32}{17}$　　14．$[-\frac{\sqrt{14}}{2},\frac{\sqrt{14}}{2}]$

15. **解:**若 $p$ 为真命题:$\because x_1+x_2=m, x_1x_2=-2,$

$\therefore |x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{m^2+8}$.

$\because m\in[-1,1], \therefore |x_1-x_2|_{\max}=3$.

$\therefore a^2-5a-3\geq 3 . \therefore a\leq -1$ 或 $a\geq 6,$

即 $p$ 为真命题时，$a\leq -1$ 或 $a\geq 6$.

若 $q$ 为真命题,$a$=0 符合题意,

若 $a\neq 0,$ 则有 $a$>0 或 $\begin{cases} a<0, \\ \Delta=4+4a>0. \end{cases}$

∴$a$>0 或-1<$a$<0.

∴$q$ 为真命题,则 $a$>-1.

故 $q$ 为假命题时 $a\leq -1$.

综上实数 $a$ 的取值范围为 $a\leq -1$.

16．**解:**（1）由已知得 $a=b\cos C+c\sin B$，

由正弦定理得： $\sin A=\sin B\cos C+\sin C\sin B$， $\sin(B+C)=\sin B\cos C+\sin C\sin B$，

$\sin B\cos C+\cos B\sin C=\sin B\cos C+\sin C\sin B$， $\cos B\sin C=\sin C\sin B$ ………5 分

因为 $\Delta ABC$ 中 $\sin C>0$，所以 $\cos B=\sin B$，又 $\sin B>0 \therefore \cos B>0 \therefore \tan B=\frac{\sin B}{\cos B}=1$，

因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{\pi}{4}$。…………………………………………………………7 分

（2）因为 $\cos A=\frac{3}{5}$， $A\in(0,\pi)$，所以 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{4}{5}$，……………9 分

由（1）可知 $A+C=\frac{3\pi}{4}$，所以 $C=\frac{3\pi}{4}-A$，

$\cos C=\cos(\frac{3\pi}{4}-A)=\cos\frac{3\pi}{4}\cos A+\sin\frac{3\pi}{4}\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin A-\cos A)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{4}{5}-\frac{3}{5})=\frac{\sqrt{2}}{10}$ ……14 分

17. **解:**

试题解析：（1）将圆C化成标准方程得$(x+1)^2+(y-2)^2=2$，

①当直线在两坐标轴上的截距为零时，设直线方程为$y=kx$，由直线与圆相切得$\frac{|-k-2|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{2}$，即

$k=2\pm\sqrt{6}$，从而切线方程为$y=(2\pm\sqrt{6})x$．

②当直线在两坐标轴上的截距不为零时，设直线方程为$x+y-a=0$，由直线与圆相切得$x+y+1=0$或$x+y-3=0$．

（2）由$|\overline{PO}|=|\overline{PM}|$得${x_1}^2+{y_1}^2=(x_1+1)^2+(y_1-2)^2-2\Rightarrow 2x_1-4y_1+3=0$．

即点P在直线$l$为$2x-4y+3=0$上，$|\overline{PM}|$取最小值时，即$|\overline{OP}|$取得最小值，直线OP⊥l，于是直线$l_{OP}$的方程为$2x+y=0$．

解方程组$\begin{cases}2x+y=0\\2x-4y+3=0\end{cases}$得P点坐标为$(-\frac{3}{10},\frac{3}{5})$．

18. **解:**（1）设$CD=x$，过$P$作$PH\perp BC$，垂足为$H$。

$\tan\angle BPH=\frac{30}{x}$，$\tan\angle APH=\frac{10}{x}$,……………………………………………2 分

$\therefore\tan\theta=\tan(\angle BPH-\angle BPH)=\frac{\frac{30}{x}-\frac{10}{x}}{1+\frac{30}{x}.\frac{10}{x}}=\tan30^\circ$ ……………………………4 分

解得：$CD=x=10\sqrt{3}$ ……………………………………………………6 分

解法二：用余弦定理求解给分。

（2）$\tan\angle BPH=\frac{80-a}{x}$，$\tan\angle APH=\frac{60-a}{x}$

$\therefore\tan\theta=\tan(\angle BPH-\angle BPH)=\frac{\frac{80-a}{x}-\frac{60-a}{x}}{1+\frac{80-a}{x}.\frac{60-a}{x}}$ ………………………………8 分

由题知$\tan\theta\ge\tan30^\circ$在$a\in[52,60]$上恒成立……………………………………10 分

$\therefore 20\sqrt{3}x-x^2\ge(80-a)(60-a)$在$a\in[52,60]$上恒成立…………………12 分

$\therefore 20\sqrt{3}x-x^2\ge224$　解得$10\sqrt{3}-2\sqrt{19}\le x\le10\sqrt{3}+2\sqrt{19}$ …………………15 分

答：CD 的取值范围$10\sqrt{3}-2\sqrt{19}\le x\le10\sqrt{3}+2\sqrt{19}$ ……………………………16 分

解法二：利用 P 点轨迹方程是圆的一部分给分

19.**解:** 圆 M 的标准方程为$(x-6)^2+(y-7)^2=25$，所以圆心 M(6，7)，半径为 5,.

（1）由圆心 N 在直线 x=6 上，可设$N(6,y_0)$. 因为圆 N 与 x 轴相切，与圆 M 外切，

所以$0<y_0<7$，于是圆 N 的半径为$y_0$，从而$7-y_0=5+y_0$，解得$y_0=1$.

因此，圆 N 的标准方程为$(x-6)^2+(y-1)^2=1$.

(2)因为直线$l$∥OA，所以直线 l 的斜率为$\frac{4-0}{2-0}=2$.

设直线 l 的方程为 y=2x+m，即 2x-y+m=0，则圆心 M 到直线 l 的距离$d=\frac{|2\times 6-7+m|}{\sqrt{5}}=\frac{|m+5|}{\sqrt{5}}$.

因为$BC=OA=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$, 而$MC^2=d^2+\left(\frac{BC}{2}\right)^2$, 所以$25=\frac{(m+5)^2}{5}+5$，

解得 m=5 或 m=-15.　故直线 l 的方程为 2x-y+5=0 或 2x-y-15=0.

(3)设$P(x_1,y_1),\mathrm{Q}(x_2,y_2)$.

因为$A(2,4),T(t,0),\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TP}=\overrightarrow{TQ}$, 所以$\begin{cases}x_2=x_1+2-t\\ y_2=y_1+4\end{cases}$ ……①

因为点 Q 在圆 M 上，所以$(x_2-6)^2+(y_2-7)^2=25.$ …….②

将①代入②，得$(x_1-t-4)^2+(y_1-3)^2=25$.

于是点$P(x_1,y_1)$既在圆 M 上，又在圆$[x-(t+4)]^2+(y-3)^2=25$上，

从而圆$(x-6)^2+(y-7)^2=25$与圆$[x-(t+4)]^2+(y-3)^2=25$有公共点，

所以$5-5\le\sqrt{[(t+4)-6]^2+(3-7)^2}\le 5+5$, 解得$2-2\sqrt{21}\le t\le 2+2\sqrt{21}$.

因此，实数 $t$ 的取值范围是$\left[2-2\sqrt{21},2+2\sqrt{21}\right]$.

20.**解:** (1)当　$a=1$ 时，$f(x)=x-\frac{1}{x}$，$f'(x)=1+\frac{1}{x^2}$　…………2 分

$f(2)=\frac{3}{2}$，$f'(2)=\frac{5}{4}$　所以，函数 $f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线方程为 $y-\frac{3}{2}=\frac{5}{4}(x-2)$

即：$5x-4y-4=0$　…………4 分

（2）函数的定义域为：$\{x\,|\,x\neq 0\}$

$f'(x)=a-\frac{a-2}{x^2}=\frac{ax^2+(2-a)}{x^2}(a>0)$　…………6 分

当 $0<a\le 2$ 时，$f'(x)\ge 0$ 恒成立，所以，$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 上单调递增

当 $a>2$ 时，令 $f'(x)=0$，即：$ax^2+2-a=0$，$x_1=-\sqrt{\frac{a-2}{a}},x_2=\sqrt{\frac{a-2}{a}}$

$f^{'}(x)>0,\ x>x_2$或$x<x_1$；$f^{'}(x)<0,\ x_1<x<0$或$0<x<x_2$，

所以，$f(x)$单调递增区间为$(-\infty,-\sqrt{\frac{a-2}{a}})$和$(\sqrt{\frac{a-2}{a}},+\infty)$，

单调减区间为$(-\sqrt{\frac{a-2}{a}},0)$和$(0,\sqrt{\frac{a-2}{a}})$．　　……10 分

（3）因为$f(x)\ge 2\ln x$在$[1,+\infty)$上恒成立，有$ax+\frac{a-2}{x}+2-2a-2\ln x\ge 0(a>0)$在$[1,+\infty)$上恒成立．

所以，令$g(x)=ax+\frac{a-2}{x}+2-2a-2\ln x$，

则$g^{'}(x)=a-\frac{a-2}{x^2}-\frac{2}{x}=\frac{ax^2-2x-a+2}{x^2}=\frac{(x-1)[ax+(a-2)]}{x^2}$．

令$g^{'}(x)=0,$则$x_1=1,x_2=-\frac{a-2}{a}$

若$-\frac{a-2}{a}=1$，即$a=1$时，$g^{'}(x)\ge 0$，函数$g(x)$在$[1,+\infty)$上单调递增，又$g(1)=0$

所以，$f(x)\ge 2\ln x$在$[1,+\infty)$上恒成立；

若$-\frac{a-2}{a}>1$，即$a<1$时，当$x\in(0,1),(-\frac{a-2}{a},+\infty)$时，$g^{'}(x)>0,g(x)$单调递增；

当$x\in(1,-\frac{a-2}{a})$时，$g^{'}(x)<0$，$g(x)$单调递减

所以，$g(x)$在$[1,+\infty)$上的最小值为$g(-\frac{a-2}{a})$，

因为$g(1)=0,$所以$g(-\frac{a-2}{a})<0$不合题意．

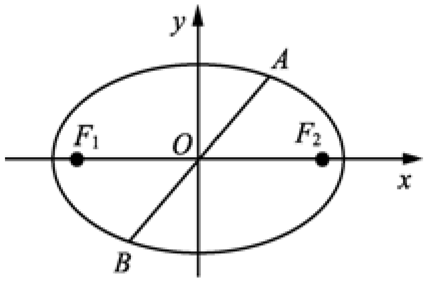
$-\frac{a-2}{a}<1,$即$a>1$时，当$x\in(0,-\frac{a-2}{a}),(1,+\infty)$时，$g^{'}(x)>0,g(x)$单调递增，

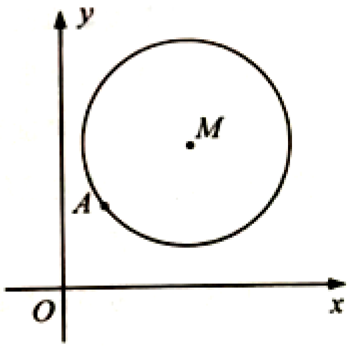
当$x\in(-\frac{a-2}{a},1)$时，$g^{'}(x)<0,g(x)$单调递减，

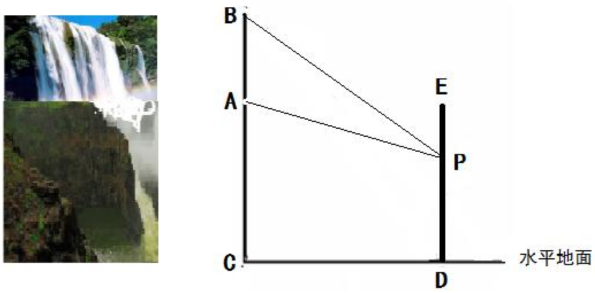
所以，$g(x)$在$[1,+\infty)$上的最小值为$g(1)$

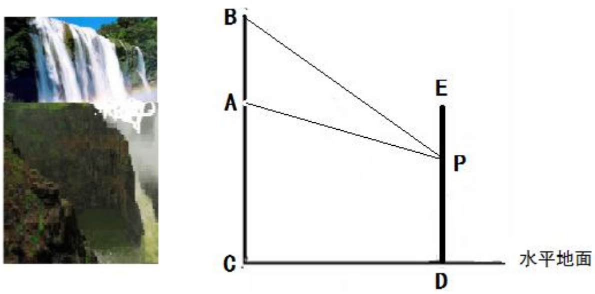
又因为$g(1)=0$，所以$f(x)\ge 2\ln x$恒成立

综上知，$a$的取值范围是$[1,+\infty)$．　　…………16 分


y
A
$F_1$
O
$F_2$
x
B


y
M
A
O
x


B
A
E
P
C
D
水平地面


B
A
E
P
C
D
水平地面