江苏省仪征中学 2019-2020 学年第一学期
高三数学周三练习(7)

2019.10.23

范围：集合与逻辑、函数与导数、三角函数、平面向量、直线与圆 、圆锥曲线、不等式

一、填空题：本大题共 14 小题，每小题 5 分，计 70 分. 不需写出解答过程，请把答案写在答题纸的指定位置上.

1．已知集合 $A=\{0,1,2,8\}$， $B=\{-1,1,6,8\}$，那么 $A\cap B=$__▲__.

2．若复数 z 满足 $i\cdot z=1+2i$，其中 i 是虚数单位，则 z 的实部为__▲__.

3．对于命题 p：$\exists x\in R$，使得 $x^2+x+1<0$．则 $\neg p$ 为：__▲__.

4．若实数 x,y 满足 $\begin{cases}x+y-1\ge 0\\ y-x-1\le 0\\ x\le 1\end{cases}$，则 $z=2x+3y$ 的最大值为__▲__.

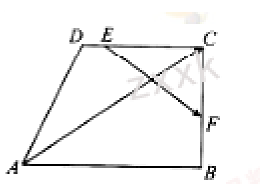
5．函数 $f(x)=\sqrt{\log_2 x-1}$ 的定义域为__▲__.

6．已知函数 $y=\sin(2x+\varphi)(-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2})$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{3}$ 对称，则 φ 的值是__▲__.

7．在平面直角坐标系 xOy 中，若双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点 $F(c,0)$ 到一条渐近线的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}c$，则其离心率的值是__▲__.

8．函数 $f(x)$ 满足 $f(x+4)=f(x)(x\in\mathbf{R})$，且在区间 $(-2,2]$ 上，$f(x)=\begin{cases}\cos\frac{\pi x}{2},0<x\le 2,\\ |x+\frac{1}{2}|,-2<x\le 0,\end{cases}$ 则 $f(f(15))$ 的值为__▲__.

9．如图，在直角梯形 $ABCD$ 中，$AB//DC,\angle ABC=90^\circ,AB=3,BC=DC=2$，若 E,F 分别是线段 DC 和 BC 上的动点，则 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{EF}$ 的取值范围是 __▲__.



10．若函数 $f(x)=2x^3-ax^2+1(a\in\mathbf{R})$ 在 $(0,+\infty)$ 内有且只有一个零点，则 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的最大值与最小值的和为__▲__.

11．在平面直角坐标系 xOy 中，A 为直线 $l:y=2x$ 上在第一象限内的点，$B(5,0)$，以 AB 为直径的圆 C 与直线 l 交于另一点 D．若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$，则点 A 的横坐标为__▲__.

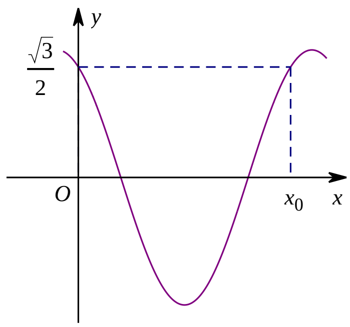
12.在平面直角坐标系 xoy 中，已知圆 $C:(x-a)^2+(x-a+2)^2=1$，点 $A(0,2)$，若圆上任意一点 M 均满足 $MA^2+MO^2\le 34$,则实数 a 的取值范围是__▲__.

13．在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，$\angle ABC=120°$，$\angle ABC$ 的平分线交 AC 于点 D，且 $BD=1$，则 $4a+c$ 的最小值为__▲__.

14．设圆 $x^2+(y-1)^2=1$ 的切线 l 与 x 轴正半轴，y 轴正半轴分别交于点 A,B，当 AB 取最小值时，切线 l 在 y 轴上的截距为__▲__.

二、解答题：本大题共 6 小题，计 90 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤，请把答案写在答题纸的指定区域内.

15. 函数 $f(x)=\cos(\pi x+\varphi)(0<\varphi<\frac{\pi}{2})$ 的部分图象如图所示.



（Ⅰ）写出 φ 及图中 x_0 的值；

（Ⅱ）设 $g(x)=f(x)+f(x+\frac{1}{3})$，求函数 $g(x)$ 在区间 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{3}]$ 上 的最大值和最小值.

16、在△ ABC 中，a，b，c 分别为角 A，B，C 所对的边长，且 $c=-3b\cos A$，$\tan C=\frac{3}{4}$．

（1）求 $\tan B$ 的值；

（2）若 $c=2$，求△ ABC 的面积．

17. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知圆 M ：$x^2+y^2-8x+6=0$，过点 $P(0,2)$ 且斜率为 k 的直线与圆 M 相交于不同的两点 A,B，线段 AB 的中点为 N 。

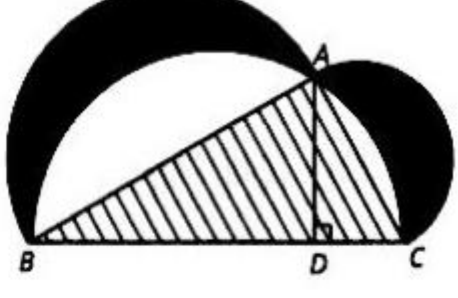
(1)求 k 的取值范围；

(2)若 $ON//MP$，求 k 的值。

18．下图来自古希腊家希波克拉底所研究的几何图形，此图由三个半圆构成，三个半圆的直径分别为直角三角形 ABC 的斜边 BC 、直角边 AB 、直角边 AC ，ΔABC 的三边围成的区域记为Ⅰ，黑色部分记为Ⅱ，其余部分记为III.若 $BC=10$，设 $\angle ABC=\theta$

（1）试写出区域III面积 S_{III} 关于 θ 的函数解析式，并求出区域III面积 S_{III} 的最小值；

（2）过点 A 作 AD⊥BC 于 D，当△ABD 面积最大时，求区域 II 的面积 S_{II}.



19. 已知圆 $O: x^2+y^2=r^2(r>0)$ 与椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 相交于点 $M\left(0,1\right)$，$N\left(0,-1\right)$，

且椭圆的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

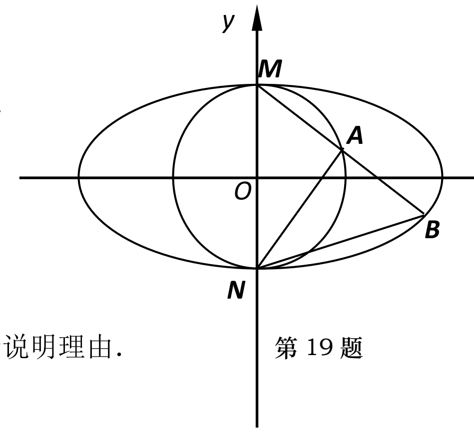
（1）求 r 值和椭圆 C 的方程；

（2）过点 M 的直线 l 另交圆 O 和椭圆 C 分别于 A，B 两点.

① 若 $2\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MA}$，求直线 l 的方程；

② 设直线 NA 的斜率为 k_1，直线 NB 的斜率为 k_2，

问：$\dfrac{k_2}{k_1}$ 是否为定值,如果是,求出定值；如果不是，请说明理由.



第 19 题

20．已知函数 $g(x)=f(x)+\dfrac{1}{2}x^2-bx$，函数 $f(x)=x+alnx$ 的图象在 $x=1$ 处的切线与直线 $2x-y+3=0$ 平行.

（Ⅰ）求实数 a 的值；

（Ⅱ）若函数 $g(x)$ 存在单调递减区间，求实数 b 的取值范围；

（Ⅲ）设 $x_1, x_2\ (x_1<x_2)$ 是函数 $g(x)$ 的两个极值点，若 $b\geq\dfrac{7}{2}$，试求 $g\left(x_1\right)-g\left(x_2\right)$ 的最小值.

参考答案

1．{1，8}　2．2　3．$\forall x\in R$，均有 $x^2+x+1\ge 0$　4．8　5.[2，+∞）

6．$-\frac{\pi}{6}$　7．2　8．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　9．[−4，6]　10．−3

11．3　12　$[0,3]$　13．9　14、$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

解析：设直线l与坐标轴的交点分别为$A(a,0)$，$B(0,b)$，显然$a>1$，$b>2$．

则直线l：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$，依题意：$\frac{|\frac{1}{b}-1|}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}}=1$，即$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{b^2}-\frac{2}{b}+1$，所以$a^2=\frac{b}{b-2}$，

所以 $AB^2=a^2+b^2=\frac{b}{b-2}+b^2$，设 $f(x)=\frac{x}{x-2}+x^2$，则

$$f'(x)=\frac{-2}{(x-2)^2}+2x=\frac{2[x(x-2)^2-1]}{(x-2)^2}$$

$$=\frac{2(x^3-4x^2+4x-1)}{(x-2)^2}=\frac{2(x-1)(x^2-3x+1)}{(x-2)^2}\ (x>2)$$

设$f'(x)=0$，则$x_1=1$，$x_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$，$x_3=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$，

又$x>2$，故当$x\in(2,x_3)$时，$f(x)$单调递减；当$x\in(x_3,+\infty)$时，$f(x)$单调递增；

所以当$b=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$，$a^2=\frac{b}{b-2}=\sqrt{5}+2$时，$AB$有最小值．

15、解：（Ⅰ）φ的值是$\frac{\pi}{6}$．　x_0的值是$\frac{5}{3}$．

（Ⅱ）由题意可得：$f(x+\frac{1}{3})=\cos(\pi(x+\frac{1}{3})+\frac{\pi}{6})=\cos(\pi x+\frac{\pi}{2})=-\sin\pi x$．

所以 $f(x)+f(x+\frac{1}{3})=\cos(\pi x+\frac{\pi}{6})-\sin\pi x=\cos\pi x\cos\frac{\pi}{6}-\sin\pi x\sin\frac{\pi}{6}-\sin\pi x$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\pi x-\frac{1}{2}\sin\pi x-\sin\pi x=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\pi x-\frac{3}{2}\sin\pi x=\sqrt{3}\cos(\pi x+\frac{\pi}{3}).$$

因为 $x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{3}]$，所以 $-\frac{\pi}{6}\le\pi x+\frac{\pi}{3}\le\frac{2\pi}{3}$．

所以 当$\pi x+\frac{\pi}{3}=0$，即$x=-\frac{1}{3}$时，$g(x)$取得最大值$\sqrt{3}$；

当$\pi x+\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$，即$x=\frac{1}{3}$时，$g(x)$取得最小值$-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

16、（1）解：由正弦定理，得 $\sin C=-3\sin B\cos A$，

即$\sin(A+B)=-3\sin B\cos A$.

所以$\sin A\cos B+\cos A\sin B=-3\sin B\cos A$.

从而$\sin A\cos B=-4\sin B\cos A$.

因为$\cos A\cos B\neq 0$，所以$\frac{\tan A}{\tan B}=-4$.

又$\tan C=-\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{\tan A\tan B-1}$，由（1）知，$\frac{3\tan B}{4\tan^2 B+1}=\frac{3}{4}$，

解得$\tan B=\frac{1}{2}$.

（2）解：由（1），得 $\sin A=\frac{2}{\sqrt{5}}$，$\sin B=\frac{1}{\sqrt{5}}$，$\sin C=\frac{3}{5}$.

由正弦定理，得$a=\frac{c\sin A}{\sin C}=\frac{2\times\frac{2}{\sqrt{5}}}{\frac{3}{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{3}$.

所以$\triangle ABC$的面积为$\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{5}}{3}\times 2\times\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{4}{3}$.

17、（1）方法一：圆的方程可化为$(x-4)^2+y^2=10$，直线可设为$y=kx+2$，

即$kx-y+2=0$，圆心M到直线的距离为$d=\frac{|4k+2|}{\sqrt{k^2+1}}$，

依题意$d<\sqrt{10}$，即$(4k+2)^2<10(k^2+1)$，解之得：$-3<k<\frac{1}{3}$；　　……7 分

方法二：由$\begin{cases} x^2+y^2-8x+6=0 \\ y=kx+2 \end{cases}$可得：$(k^2+1)x^2+4(k-2)x+10=0$，

依题意$\Delta=[4(k-2)]^2-40(k^2+1)>0$，解之得：$-3<k<\frac{1}{3}$.

（2）方法一：因为$ON//MP$，且MP斜率为$-\frac{1}{2}$，故直线ON：$y=-\frac{1}{2}x$，

由$\begin{cases} y=-\frac{1}{2}x \\ y=kx+2 \end{cases}$可得$N(-\frac{4}{2k+1},\frac{2}{2k+1})$，又$N$是$AB$中点，所以$MN\perp AB$，即

$$\frac{\frac{2}{2k+1}}{-\frac{4}{2k+1}-4}=-\frac{1}{k}$$，解之得：$k=-\frac{4}{3}$.　　……15 分

方法二：设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $N(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2})$

由 $\begin{cases} x^2+y^2-8x+6=0 \\ y=kx+2 \end{cases}$ 可得：$(k^2+1)x^2+4(k-2)x+10=0$，所以

$x_1+x_2=-\frac{4(k-2)}{k^2+1}$，

又 $ON//MP$，且 MP 斜率为 $-\frac{1}{2}$，

所以 $\frac{\frac{y_1+y_2}{2}}{\frac{x_1+x_2}{2}}=-\frac{1}{2}$，即 $\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=-\frac{1}{2}$，也就是 $\frac{k(x_1+x_2)+4}{x_1+x_2}=-\frac{1}{2}$，

所以 $\frac{k(-\frac{4(k-2)}{k^2+1})+4}{-\frac{4(k-2)}{k^2+1}}=-\frac{1}{2}$，解之得：$k=-\frac{4}{3}$.

方法三：点 N 的坐标同时满足 $\begin{cases} y=kx+2 \\ y=-\frac{1}{2}x \\ \frac{y}{x-4}=-\frac{1}{k} \end{cases}$，解此方程组，消去 x,y 可得 $k=-\frac{4}{3}$.

18．解：（1）因为 $BC=10$，$\angle ABC=\frac{\theta}{2}$，

所以 $AB=10\cos\frac{\theta}{2}$，$AC=10\sin\frac{\theta}{2}$，

区域 I 面积 $S_1=\frac{1}{2}AB\cdot AC=\frac{1}{2}\times10\sin\frac{\theta}{2}\times10\cos\frac{\theta}{2}=25\sin\theta$，　　………………………2 分

区域III面积 $S_{\text{III}}=\frac{1}{2}\pi\cdot5^2-S_1=\frac{25\pi}{2}-25\sin\theta$，

所以，区域III面积 $S_{\text{III}}=\frac{25\pi}{2}-25\sin\theta$，$\theta\in(0，\pi)$　　……………………4 分

因为 $\theta\in(0，\pi)$，所以当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，$S_{3\min}=\frac{25\pi}{2}-25$；

答：区域III面积的最小值为 $\frac{25\pi}{2}-25$；　　……………………6 分

（2）因为 $BC=10$， $\angle ABC=\frac{\theta}{2}$，所以 $AB=10\cos\frac{\theta}{2}$，

$BD=AB\cos\frac{\theta}{2}=10\cos^2\frac{\theta}{2}=5(1+\cos\theta)$

$AD=AB\sin\frac{\theta}{2}=10\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=5\sin\theta$

所以 $S_{\Delta ABD}=\frac{1}{2}BD\cdot AD=\frac{1}{2}\times 5\sin\theta\cdot 5(1+\cos\theta)=\frac{25}{2}\sin\theta(1+\cos\theta)$ ……………………10 分

设 $f(\theta)=\sin\theta(1+\cos\theta)$， $\theta\in(0,\pi)$

则 $f'(\theta)=2\cos^2\theta+\cos\theta-1=0$，得 $\cos\theta=\frac{1}{2}$， $\theta=\frac{\pi}{3}$

当 $\theta\in(0,\frac{\pi}{3})$ 时， $\cos\theta>\frac{1}{2}$， $f'(\theta)>0$， $f(\theta)$ 为增函数

当 $\theta\in(\frac{\pi}{3},\pi)$ 时， $\cos\theta<\frac{1}{2}$， $f'(\theta)<0$， $f(\theta)$ 为减函数

所以，当 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 时， $f(\theta)$ 最大， ΔABD 面积最大， ……………………14 分

此时，区域 II 面积 $S_2=\frac{1}{2}\pi(\frac{AB}{2})^2+\frac{1}{2}\pi(\frac{AB}{2})^2-S_3$

$=\frac{1}{2}\pi(\frac{AB}{2})^2+\frac{1}{2}\pi(\frac{AB}{2})^2-(\frac{1}{2}\pi(\frac{BC}{2})^2-S_1)=S_1$

$S_1=\frac{1}{2}AB\cdot AC=\frac{1}{2}\times 10\sin\frac{\theta}{2}\times 10\cos\frac{\theta}{2}=25\sin\theta=\frac{25\sqrt{3}}{2}$，

答：当 ΔABD 面积最大时，区域 II 的面积为 $\frac{25\sqrt{3}}{2}$． ……………16 分

19、（1）因为圆 $O: x^2+y^2=r^2$ 与椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 相交于点 $M\left(0,1\right)$

所以 $b=r=1$ ． 又离心率为 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,所以 $a=\sqrt{2}$.所以椭圆 $C:\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

（2）因为过点 M 的直线 l 另交圆 O 和椭圆 C 分别于 A,B 两点，所以设直线 l 的方程

为 $y=kx+1\left(k\neq 0\right)$，

由 $\begin{cases} y=kx+1 \\ \frac{x^2}{2}+y^2=1 \end{cases}$ 得 $\left(2k^2+1\right)x^2+4kx=0$，所以 $B\left(\frac{-4k}{2k^2+1},\frac{-2k^2+1}{2k^2+1}\right)$，

同理$\begin{cases} y=kx+1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$得到$\left(k^2+1\right)x^2+2kx=0$， 所以$A\left(\dfrac{-2k}{k^2+1},\dfrac{-k^2+1}{k^2+1}\right)$，

因为$2\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MA}$， 则$2\dfrac{-4k}{2k^2+1}=3\dfrac{-2k}{k^2+1}$则

因为$k\neq 0$，所以$k=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，即直线l的方程为$y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+1$.

②根据①$B\left(\dfrac{-4k}{2k^2+1},\dfrac{-2k^2+1}{2k^2+1}\right)$， $A\left(\dfrac{-2k}{k^2+1},\dfrac{-k^2+1}{k^2+1}\right)$，

$$k_1=k_{NA}=\frac{y_A-y_N}{x_A-x_N}=\frac{\dfrac{-k^2+1}{k^2+1}+1}{\dfrac{-2k}{k^2+1}}=-\frac{1}{k}，\quad k_2=k_{NB}=\frac{y_B-y_N}{x_B-x_N}=\frac{\dfrac{-2k^2+1}{2k^2+1}+1}{\dfrac{-4k}{2k^2+1}}=-\frac{1}{2k}，$$

所以$\dfrac{k_2}{k_1}=\dfrac{1}{2}$为定值.

20、解：（Ⅰ）$\because f(x)=x+a\ln x$，$\therefore f'(x)=1+\dfrac{a}{x}$.

$\because$切线与直线$2x-y+3=0$平行，

$\therefore k=f'(1)=1+a=2$，$\therefore a=1$.

（Ⅱ）易得$g(x)=\ln x+\dfrac{1}{2}x^2-(b-1)x\ (x\in(0,+\infty))$，

$\therefore g'(x)=\dfrac{1}{x}+x-(b-1)=\dfrac{x^2-(b-1)x+1}{x}\ \ (x\in(0,+\infty))$.

由题意，知函数$g(x)$存在单调递减区间, 等价于$g'(x)<0$在$(0,+\infty)$上有解，

$\because x>0$，则故可设$\varphi(x)=x^2-(b-1)x+1$.

而$\varphi(0)=1>0$，所以，要使$g'(x)<0$在$(0,+\infty)$上有解，

则只须$\begin{cases} \dfrac{b-1}{2}>0, \\ \Delta=(b-1)^2-4>0 \end{cases}$， 即$\begin{cases} b>1, \\ b>3或b<-1 \end{cases}$，

故所求实数b的取值范围是$(3,+\infty)$.

（Ⅲ）由（Ⅱ）知，$g'(x)=\dfrac{x^2-(b-1)x+1}{x}$，

令$g'(x)=0$，得$x^2-(b-1)x+1=0$.

$\because x_1, x_2\ (x_1 < x_2)$是函数$g(x)$的两个极值点，

$\therefore x_1, x_2\ (x_1 < x_2)$是方程$x^2 - (b - 1)x + 1 = 0$的两个根，

$\therefore x_1 + x_2 = b - 1$，$x_1 x_2 = 1$.

$$\therefore g(x_1) - g(x_2) = \left[lnx_1 + \frac{1}{2}x_1^2 - (b - 1)x_1\right] - \left[lnx_2 + \frac{1}{2}x_2^2 - (b - 1)x_2\right]$$

$$= ln\frac{x_1}{x_2} + \frac{1}{2}\left(x_1^2 - x_2^2\right) - (b - 1)\left(x_1 - x_2\right)$$

$$= ln\frac{x_1}{x_2} + \frac{1}{2}\left(x_1^2 - x_2^2\right) - \left(x_1 + x_2\right)\left(x_1 - x_2\right)$$

$$= ln\frac{x_1}{x_2} - \frac{1}{2}\left(x_1^2 - x_2^2\right) = ln\frac{x_1}{x_2} - \frac{1}{2}\left(\frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 x_2}\right)$$

$$= ln\frac{x_1}{x_2} - \frac{1}{2}\left(\frac{x_1}{x_2} - \frac{x_2}{x_1}\right)$$

令$t = \frac{x_1}{x_2}$，$\because 0 < x_1 < x_1$，$\therefore t = \frac{x_1}{x_2} \in (0,1)$，

且$g(x_1) - g(x_2) = \mathrm{h}(t) = lnt + \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)$.

$\because b \geq \frac{7}{2}$，$\therefore b - 1 \geq \frac{5}{2} > 0$，

$$\therefore (b - 1)^2 = \left(x_1 + x_2\right)^2 = \frac{\left(x_1 + x_2\right)^2}{x_1 x_2} = \frac{x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2}{x_1 x_2}$$

$$= t + \frac{1}{t} + 2 \geq \frac{25}{4}$$

化简整理，得$4t^2 - 17t + 4 \geq 0$,解得$t \leq \frac{1}{4}$或$t \geq 4$.

而$t \in (0,1)$，$\therefore 0 < t \leq \frac{1}{4}$.

又$h'(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) = -\frac{(t - 1)^2}{2t^2} < 0$，$\therefore$函数$\mathrm{h}(t)$在$\left(0,\frac{1}{4}\right]$单调递减，

$\therefore \mathrm{h}(t) \geq \mathrm{h}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{15}{8} - 2ln2$.

故$g(x_1) - g(x_2)$的最小值为$\frac{15}{8} - 2ln2$.