优化解题过程,提升计算能力

——以一道解析几何证明题为例

孙世林

北京市第八十中学　100102

[摘　要] 历年高考解析几何解答题,综合性强,能力要求高,考生普遍失分较多. 文章以一道解析几何问题为例,谈谈如何回归解析几何知识本质,如何优化解题过程,如何从多角度探究问题,从而提升计算能力.

[关键词] 解析几何;解题思路;运算求解

解析几何综合题是考查学生能力的主要内容之一,在高考中占有重要地位, 试题呈现出综合性强, 难度大,灵活多变的特点,对能力要求高,普遍存在解题思路不清、方法选择不当、计算不过关等现象,下面就谈谈如何优化解题过程,提升计算能力.

问题:如图1,已知椭圆C:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ($a>b>0$)的离心率为$\frac{1}{2}$,F为椭圆C的右焦点,$A(-a,0)$,$|AF|=3$.

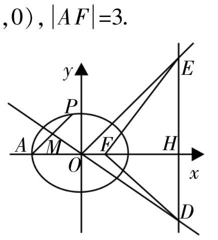

图1

(Ⅰ)求椭圆C的方程;

(Ⅱ)设O为原点,P为椭圆上一点(点P不是椭圆的长轴端点),AP的中点为M. 直线OM与直线$x=4$交于点D,过O且平行于AP的直线与直线$x=4$交于点E,

求证:$\angle ODF=\angle OEF$.

思路1: 本题的第一问比较简单,第二问是证明两个角相等. 要想证明这两个角相等,我们先看这两个角是怎样形成的? P为椭圆上一点,AP的中点M与原点O连接并延长,与直线$x=4$相交,形成了点D,点E是过O且平行于AP的直线与直线$x=4$相交形成的, 这样才出现了线段DF和EF,从而有了$\angle ODF$与$\angle OEF$,可见这两个角与点P有紧密的联系, 所以可以从直线AP的方程或点P的坐标入手.

解法1:(Ⅰ)椭圆C的方程是$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(Ⅱ)由(Ⅰ)得$A(-2,0)$.设直线AP的方程为:$y=k(x+2)(k\neq 0)$,

将其代入椭圆方程,整理得$(4k^2+3)x^2+16k^2x+16k^2-12=0$,

显然,其$\Delta>0$,设AP的中点$M(x_0,y_0)$,$P(x_1,y_1)$.

所以$-2+x_1=\frac{-16k^2}{4k^2+3}$.

所以$x_0=\frac{-2+x_1}{2}=\frac{-8k^2}{4k^2+3}$,$y_0=k(x_0+2)=\frac{6k}{4k^2+3}$,即$M\left(\frac{-8k^2}{4k^2+3},\frac{6k}{4k^2+3}\right)$.

所以直线OM的斜率是$\frac{\frac{6k}{4k^2+3}}{\frac{-8k^2}{4k^2+3}}=-\frac{3}{4k}$,

所以直线OM的方程是$y=-\frac{3}{4k}x$. 令$x=4$,得$D\left(4,-\frac{3}{k}\right)$.

设直线OE的方程是$y=kx$. 令$x=4$,得$E(4,4k)$.

由$F(1,0)$,得直线EF的斜率是$\frac{4k}{4-1}=\frac{4k}{3}$,所以$EF\perp OM$.

又直线DF的斜率是$\frac{-\frac{3}{k}}{4-1}=-\frac{1}{k}$,

所以$DF\perp OE$,

所以$\angle ODF=\angle OEF$.

作者简介:孙世林(1967-),本科学历,高级教师,北京市数学特级教师,主要从事高中数学教学及数学情境教学的研究,曾获北京市数学学科带头人、教科研先进个人等称号.

解法2：(Ⅰ)椭圆C的方程是$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(Ⅱ)由(Ⅰ)得$A(-2,0)$. 设$P(x_1,y_1)$ $(x_1\neq\pm2)$，其中$3x_1^2+4y_1^2 12=0$.

因为AP的中点为M，所以$M\left(\frac{x_1-2}{2},\frac{y_1}{2}\right)$.

所以直线OM的斜率是$k_{OM}=\frac{y_1}{x_1-2}$，

所以直线OM的方程是$y=\frac{y_1}{x_1-2}x$. 令$x=4$，得$D\left(4,\frac{4y_1}{x_1-2}\right)$.

直线OE的方程是$y=\frac{y_1}{x_1+2}x$. 令$x=4$，得$E\left(4,\frac{4y_1}{x_1+2}\right)$.

由$F(1,0)$，得直线EF的斜率是$k_{EF}=\frac{4y_1}{3(x_1+2)}$，

因为$k_{EF}\cdot k_{OM}=\frac{4y_1}{3(x_1+2)}\cdot\frac{y_1}{x_1-2}=\frac{4y_1^2}{3(x_1^2-4)}=-1$，

所以$EF\perp OM$.

同理可得$k_{DF}\cdot k_{OE}=\frac{4y_1}{3(x_1-2)}\cdot\frac{y_1}{x_1+2}=\frac{4y_1^2}{3(x_1^2-4)}=-1$，

所以$DF\perp OE$，

所以$\angle ODF=\angle OEF$.

评析：解析几何综合问题常在运动变化过程中探究某些不变的性质与规律，对于这类运动变化问题，解题时要从已知出发深入探究产生运动变化的根源，从产生运动变化的根源入手.解法一从直线AP的方程入手，解法二从点P的坐标入手，对比发现解法二运算量小，究其原因是因为本题运动变化的根源是点P，所以解题时要选择好是从直线方程入手，还是从点的坐标入手，这样就可以优化解题过程，减少计算量，自然快捷地解决此类问题.

思路2：本题的第二问是一道证明题，我们可以从结论出发反推成立的条件，若$\angle ODF$和$\angle OEF$相等，则它们的三角函数值就应该相等. 我们选择哪种三角函数？如图不难发现$\angle ODF=\angle ODH-\angle FDH$，而$\angle ODH$和$\angle FDH$分别位于$\mathrm{Rt}\triangle ODH$和$\mathrm{Rt}\triangle FDH$中，可见这些角的正切值很容易得到；同理$\angle OEF=\angle OEH-\angle FEH$也容易求得正切值，这样我们就可以借助证明两个角的正切值相等来说明两个角相等.

解法3：(Ⅰ)椭圆的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(Ⅱ)由解法2可知，$D\left(4,\frac{4y_1}{x_1-2}\right)$，$E\left(4,\frac{4y_1}{x_1+2}\right)$. 设直线$x=4$与$x$轴交于$H$，

设$\angle ODH=\alpha$，$\angle FDH=\beta$，则$\tan\alpha=\frac{4}{|y_D|}$，$\tan\beta=\frac{3}{|y_D|}$；

所以$\tan\angle ODF=\tan(\alpha-\beta)=\frac{|y_D|}{y_D^2+12}$，

同理，$\tan\angle OEF=\frac{|y_E|}{y_E^2+12}$.

依题意，y_D，y_E异号，不妨设$y_E>0$，

所以$\frac{|y_E|}{y_E^2+12}-\frac{|y_D|}{y_D^2+12}=\frac{|y_E|}{y_E^2+12}+\frac{|y_D|}{y_D^2+12}=\frac{y_E(y_D^2+12)+y_D(y_E^2+12)}{(y_E^2+12)(y_D^2+12)}$.

又$y_E(y_D^2+12)+y_D(y_E^2+12)=(y_E+y_D)\cdot(y_E\cdot y_D+12)=(y_E+y_D)\left(\frac{4y_1}{x_1+2}\cdot\frac{4y_1}{x_1-2}+12\right)=(y_E+y_D)\left(\frac{16y_1^2}{x_1^2-4}+12\right)$.

又点$P(x_1,y_1)$在椭圆上，所以$3x_1^2+4y_1^2-12=0$，

所以$(y_E+y_D)\left(\frac{16y_1^2}{x_1^2-4}+12\right)=(y_E+y_D)\cdot\left[\frac{12(4-x_1^2)}{x_1^2-4}+12\right]=(y_E+y_D)(-12+12)=0$.

所以$\tan\angle ODF=\tan\angle OEF$，

依题意$\angle ODF$和$\angle OEF$均为锐角，所以$\angle ODF=\angle OEF$.

评析：解决解析几何综合问题时，有时直接求解，常常感觉不知从何入手，我们可以尝试从结论入手，本解法中我们借助证明两个角的正切值相等来说明两个角相等，这就实现了由几何条件向代数运算的转化，体现了解析几何的本质；几何条件代数化的途径很多，如本题我们也可以求出三角形的三边借助余弦定理求角的余弦值，也可以借助向量的数量积求角的余弦值，选择哪种途径要依据题目的特点，要有利于接下来的代数运算.

思路3：在解决解析几何的综合题时，要善于将问题进行转化，从多个角度，用不同的方法探究同一个问题，对于本题我们还可以继续深入探究题目中图形的几何特征，从几何角度寻求突破. 本题是证明两角相等，观察图形发现，两个角分别位于有公共边OF的两个三角形中，由此可以联想到三角形的外接圆，联想有公共弦的两个圆，如果这两个圆的半径相等，那么其公共弦所对圆周角相等，这样我们便有了本题的第4种解法：

解法4：由解法一可知得$D\left(4,-\frac{3}{k}\right)$，$E(4,4k)$.

设过O,E,F三点的圆C_1的方程为$x^2+y^2+m_1x+n_1y+p_1=0$，将O,E,F代入圆的方程得：$p_1=0$，$m_1=-1$，$n_1=-4k-\frac{3}{k}$，所以，圆C_1的半径为$r_1^2=\frac{1}{4}(m_1^2+n_1^2-4p_1)=\frac{1}{4}\left[1+\left(-4k-\frac{3}{k}\right)^2\right]$.

设过O,D,F三点的圆C_2的方程为$x^2+y^2+m_2x+n_2y+p_2=0$，将O,D,F代入圆的方程得：$p_2=0$，$m_2=-1$，$n_2=4k+\frac{3}{k}$，

所以，圆C_2的半径为$r_2^2=\frac{1}{4}(m_2^2+n_2^2-4p_2)=\frac{1}{4}\left[1+\left(4k+\frac{3}{k}\right)^2\right]$，可见，圆$C_1$，$C_2$有公共弦且半径相等，

所以$\angle ODF=\angle OEF$.

点评："解析几何"研究的是几何问题，恰当利用平面几何的有关知识解决问题，也是不可或缺的方法，解析几何问题中蕴含很多几何条件，这些几何条件间有什么关系？从这些几何关系出发又能得到什么样的新的几何关系？某些几何关系成立需要有怎样的几何条件？随着这些疑问的探究和解决，解题思路也就自然生成了.