

高二数学中档题小练(21.4.19)

限时：60 分钟

范围：导数及其应用、复数、综合法求角和距离、排列组合二项式定理

一、单选题（共 6 题）

1. 棣莫弗公式 $(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$ (i 为虚数单位) 是由法国数学家棣莫弗 (1667 - 1754) 发现的,根据棣莫弗公式可知, 复数 $\left(\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}\right)^6$ 在复平面内所对应的点位于 ().

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

2. 中国有十二生肖, 又叫十二属相, 每一个人的出生年份对应了十二种动物 (鼠、牛、虎、兔、龙、蛇、马、羊、猴、鸡、狗、猪) 中的一种. 现有十二生肖的吉祥物各一个, 已知甲同学喜欢牛、马和猴, 乙同学喜欢牛、狗和羊, 丙同学所有的吉祥物都喜欢, 让甲乙丙三位同学依次从中选一个作为礼物珍藏, 若各人所选取的礼物都是自己喜欢的, 则不同的选法有 ().

- A. 50 种 B. 60 种 C. 80 种 D. 90 种

3. 设 $a \in Z$, 且 $0 \leq a \leq 16$, 若 $4^{2020} + a$ 能被 17 整除, 则 a 的值为 ()

- A. 1 B. 4 C. 13 D. 16

4. $C_3^0 + C_4^1 + C_5^2 + \dots + C_{21}^{18}$ 的值等于 ()

- A. 7351 B. 7355 C. 7513 D. 7315

5. 已知函数 $f(x) = ax^2 + 2x - e^x$, 若对 $\forall m, n \in (0, +\infty), m > n$, 都有 $\frac{f(m) - f(n)}{m - n} < 2$ 成立,则 a 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, \frac{1}{2}]$ B. $(-\infty, 1]$ C. $(-\infty, \frac{e}{2}]$ D. $(-\infty, e]$

6. 已知偶函数 $f(x) (x \neq 0)$ 的导函数为 $f'(x)$, 且满足 $f(-2) = 0$, 当 $x > 0$ 时, $3f(x) - xf'(x) > 0$, 则 $f(x) > 0$ 的解集为 ()

- A. $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ B. $(-2, 0) \cup (0, 2)$ C. $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$ D. $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$

二、多选题（共 2 题）

7. 下列说法正确的有 ()

- A. 任意两个复数都不能比大小
B. 若 $z = a + bi$ ($a \in R, b \in R$), 则当且仅当 $a = b = 0$ 时, $z = 0$
C. 若 $z_1, z_2 \in C$, 且 $z_1^2 + z_2^2 = 0$, 则 $z_1 = z_2 = 0$
D. 若复数 z 满足 $|z| = 1$, 则 $|z + 2i|$ 的最大值为 3

8. 若 $(1+x) + (1+x)^2 + \dots + (1+x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, 且 $a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} = 125 - n$, 则下列结论正确的是 ()

- A. $n = 6$
B. $(1+2x)^n$ 展开式中二项式系数和为 729
C. $(1+x) + (1+x)^2 + \dots + (1+x)^n$ 展开式中所有项系数和为 126
D. $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + na_n = 321$

三、填空题（共 3 题）

9. 若 $\bar{z}(1-i) = 2i$ ，则 z 的虚部为_____.

10. 已知 $(1+x)^{10} = a_0 + a_1(1-x) + a_2(1-x)^2 + \cdots + a_{10}(1-x)^{10}$ ，则 $a_8 =$ _____.

11. 有 7 张卡片分别写有数字 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 从中任取 4 张，可排出不同的四位数的个数是_____.

四、解答题（共 3 题）

12. 5 名男生 3 名女生参加升旗仪式：

(1) 站两横排，3 名女生站前排，5 名男生站后排有多少种站法？

(2) 站两纵列，每列 4 人，每列都有女生且女生站在男生前面，有多少种排列方法？

13. 已知 $(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}})^n$ 展开式的各项系数之和比 $(1 - 2x)^{2n}$ 展开式的二项式系数之和小 240.

(1) 求 n 的值;

(2) 求 $(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}})^n$ 展开式中系数最大的项;

(3) 求 $(1 - 2x)^{2n}$ 展开式的奇数项的系数之和.

14. 已知函数 $f(x) = \ln x - x - \frac{m}{x}$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 令 $g(x) = me^x - x + \ln m$. 若 $g(x) > f(x) + \frac{m}{x}$ 恒成立, 求 m 的取值范围

高二数学中档题小练(21.4.19)

时间：60 分钟 满分：86 分

范围：导数及其应用、复数、综合法求角和距离、排列组合二项式定理

一、单选题（共 6 题，每题 5 分，共 30 分）

1. 棣莫弗公式 $(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$ (i 为虚数单位) 是由法国数学家棣莫弗 (1667 - 1754) 发现的，根据棣莫弗公式可知，复数 $\left(\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}\right)^6$ 在复平面内所对应的点位于 () .

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【参考答案】 B

【试题解析】 解：由 $(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$ ，

$$\text{得 } \left(\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}\right)^6 = \cos \frac{6\pi}{7} + i \sin \frac{6\pi}{7},$$

$$\because \frac{\pi}{2} < \frac{6\pi}{7} < \pi, \therefore \cos \frac{6\pi}{7} < 0, \sin \frac{6\pi}{7} > 0,$$

$\therefore$ 复数 $\left(\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}\right)^6$ 在复平面内所对应的点位于第二象限.

故选：B.

由已知可得 $\left(\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}\right)^6 = \cos \frac{6\pi}{7} + i \sin \frac{6\pi}{7}$ ，再由三角函数的象限符号得答案.

本题考查棣莫弗定理的应用，考查三角函数的象限符号，是基础题.

2. 中国有十二生肖，又叫十二属相，每一个人的出生年份对应了十二种动物 (鼠、牛、虎、兔、龙、蛇、马、羊、猴、鸡、狗、猪) 中的一种. 现有十二生肖的吉祥物各一个，已知甲同学喜欢牛、马和猴，乙同学喜欢牛、狗和羊，丙同学所有的吉祥物都喜欢，让甲乙丙三位同学依次从中选一个作为礼物珍藏，若各人所选取的礼物都是自己喜欢的，则不同的选法有 ()

- A. 50 种 B. 60 种 C. 80 种 D. 90 种

【参考答案】 C

【解答】

解：根据题意，甲分 3 种情况讨论：

如果同学甲选牛，那么同学乙只能选狗和羊中的一种，丙同学可以从剩下的 10 种中任意选，此时的选法有 $C_2^1 \cdot C_{10}^1 = 20$ 种；

如果同学甲选马，那么同学乙能选牛、狗和羊中的一种，丙同学可以从剩下的 10 种中任意选，此时的选法有 $C_3^1 \cdot C_{10}^1 = 30$ 种；

如果同学甲选猴，那么同学乙能选牛、狗和羊中的一种，丙同学可以从剩下的 10 种中任意选，此时的选法有 $C_3^1 \cdot C_{10}^1 = 30$ 种；

则不同的选法共有 $20 + 30 + 30 = 80$ 种，

故选 C.

3. 设 $a \in \mathbb{Z}$ ，且 $0 \leq a \leq 16$ ，若 $4^{2020} + a$ 能被 17 整除，则 a 的值为 ()

- A. 1 B. 4 C. 13 D. 16

【参考答案】 D

【解答】

$$\text{解： } 4^{2020} = 16^{1010} = (17 - 1)^{1010}$$

$$= C_{1010}^0 17^{1010} - C_{1010}^1 17^{1009} + \dots - C_{1010}^{1009} 17 + 1$$

$\therefore 4^{2020} + a$ 能被 17 整除，

$\therefore 1 + a$ 能被 17 整除，

又 $a \in \mathbb{Z}$ ，且 $0 \leq a \leq 16$ ，则 $a = 16$.

故选 D.

4. $C_3^0 + C_4^1 + C_5^2 + \dots + C_{21}^{18}$ 的值等于 ()

- A. 7351 B. 7355 C. 7513 D. 7315

【参考答案】 D

【解答】

$$\text{解： } C_3^0 + C_4^1 + C_5^2 + \dots + C_{21}^{18}$$

$$= C_4^0 + C_4^1 + C_5^2 + \dots + C_{21}^{18}$$

$$= C_5^1 + C_5^2 + C_6^3 + \dots + C_{21}^{18}$$

$$= C_6^2 + C_6^3 + C_7^4 + \dots + C_{21}^{18}$$

$\dots$

$$= C_{21}^{17} + C_{21}^{18} = C_{22}^{18} = C_{22}^4 \\ = \frac{22 \times 21 \times 20 \times 19}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 7315,$$

故选 D.

5. 已知函数 $f(x) = ax^2 + 2x - e^x$, 若对 $\forall m, n \in (0, +\infty), m > n$, 都有 $\frac{f(m) - f(n)}{m - n} < 2$ 成立, 则 a 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, \frac{1}{2}]$ B. $(-\infty, 1]$ C. $(-\infty, \frac{e}{2}]$ D. $(-\infty, e]$

【参考答案】 C

【试题解析】 【分析】

根据条件将问题转化为 $y = f(x) - 2x$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增, 进一步转化为 $a \leq \frac{e^x}{2x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立问题, 求出函数 $h(x) = \frac{e^x}{2x}$ 的最小值即可. 本题考查了利用导数研究函数的单调性和最值, 关键是将问题转化为恒成立问题, 属中档题.

【解答】

解: $\because$ 对 $\forall m, n \in (0, +\infty), m > n$, 都有 $\frac{f(m) - f(n)}{m - n} < 2$ 成立,

$\therefore$ 对 $\forall m, n \in (0, +\infty), m > n$, 都有 $f(m) - 2m < f(n) - 2n$,

令 $g(x) = f(x) - 2x = ax^2 - e^x$, 则 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

$\therefore g'(x) = 2ax - e^x \leq 0$, 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立,

$\therefore a \leq \frac{e^x}{2x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立,

令 $h(x) = \frac{e^x}{2x} (x > 0)$, 则 $h'(x) = \frac{(x-1)e^x}{2x^2}$,

令 $h'(x) = 0$, 则 $x = 1$,

$\therefore$ 当 $x > 1$ 时, $h'(x) > 0$, 此时 $h(x)$ 递增;

当 $0 < x < 1$ 时, $h'(x) < 0$, 此时 $h(x)$ 递减,

$\therefore h(x)_{\min} = h(1) = \frac{e}{2}$,

要使 $a \leq \frac{e^x}{2x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立,

只需 $a \leq h(x)_{\min} = \frac{e}{2}$,

$\therefore a$ 的取值范围为: $(-\infty, \frac{e}{2}]$.

故选: C.

6. 已知偶函数 $f(x) (x \neq 0)$ 的导函数为 $f'(x)$, 且满足 $f(-2) = 0$, 当 $x > 0$ 时, $3f(x) - xf'(x) > 0$, 则 $f(x) > 0$ 的解集为 ()

- A. $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ B. $(-2, 0) \cup (0, 2)$ C. $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$ D. $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$

【参考答案】 B

【试题解析】 【分析】

此题考查抽象函数, 函数的奇偶性, 利用导数研究函数的单调性, 导数中的函数不等式, 属中档题,

构造函数设函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x^3}$, $x > 0$ 时, 利用 $3f(x) - xf'(x) > 0$ 可得 $g'(x) = \frac{f'(x) \cdot x - 3f(x)}{x^4} < 0$, 结合奇偶性得出 $g(x)$ 的单调性, 根据 $f(-2) = 0$, 可得 $f(x) > 0$ 的解集.

【解答】

解: 根据题意, 设函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x^3}$,

当 $x > 0$ 时, $g'(x) = \frac{f'(x) \cdot x - 3f(x)}{x^4} < 0$,

所以函数 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

又 $f(x)$ 为偶函数, 所以 $g(x)$ 为奇函数, 则函数 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上也单调递减,

又 $f(-2) = 0$, 所以 $f(2) = 0$, 得 $g(2) = g(-2) = 0$,

故 $g(x)$ 在 $(-\infty, -2)$ 和 $(0, 2)$ 的函数值大于零, $g(x)$ 在 $(-2, 0)$ 和 $(2, +\infty)$ 的函数值小于零.

又因为 $f(x) = x^3 \cdot g(x)$,

所以当 $x > 0$ 时 $x^3 > 0$, 由 $f(x) > 0$ 可得 $g(x) > 0$, 即 $0 < x < 2$;

当 $x < 0$ 时 $x^3 < 0$, 由 $f(x) > 0$ 可得 $g(x) < 0$, 即 $-2 < x < 0$.

故 $f(x)$ 在 $(-2, 0) \cup (0, 2)$ 的函数值大于零.

故选 B.

二、多选题（共 2 题，每题 5 分，共 10 分：漏选得 2 分，错选或不选得 0 分）

7. 下列说法正确的有（ ）

- A. 任意两个复数都不能比大小
- B. 若 $z = a + bi$ ($a \in R, b \in R$)，则当且仅当 $a = b = 0$ 时， $z = 0$
- C. 若 $z_1, z_2 \in C$ ，且 $z_1^2 + z_2^2 = 0$ ，则 $z_1 = z_2 = 0$
- D. 若复数 z 满足 $|z| = 1$ ，则 $|z + 2i|$ 的最大值为 3

【参考答案】 BD

【试题解析】 【分析】 本题主要考查有关复数的问题，难度一般。

A 中当两个复数都是实数时能比较大小；B 中由复数的定义可得充分性和必要性，B 正确；

C 用特殊值法令 $z_1 = 1, z_2 = i$ ，则 $z_1^2 + z_2^2 = 1^2 + i^2 = 0$ 可得答案错误；D 用复数的模的算法可得则 $|z + 2i|$ 的最大值为 3 正确，可得正确答案。

【解答】 解：A 答案：实数也是复数，两个实数能比较大小，所以任意两个复数都不能比大小错误；

B 答案：若 $z = a + bi = 0$ 则 $a = b = 0$ ，若 $a = b = 0$ 则 $z = a + bi = 0 + 0i = 0$ ，

故若 $z = a + bi$ ($a \in R, b \in R$)，则当且仅当 $a = b = 0$ 时， $z = 0$ 正确；

C 答案：令 $z_1 = 1, z_2 = i$ ，则 $z_1^2 + z_2^2 = 1^2 + i^2 = 0$ ，所以若 $z_1, z_2 \in C$ ，且 $z_1^2 + z_2^2 = 0$ ，则 $z_1 = z_2 = 0$ 错误；

D 答案：设 $z = a + bi$ ($a \in R, b \in R$)，

因为 $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$ ，故 $-1 \leq b \leq 1$ ，

则 $|z + 2i| = |a + (b + 2)i| = \sqrt{a^2 + (b + 2)^2}$

$= \sqrt{a^2 + b^2 + 4b + 4} = \sqrt{1 + 4 + 4b} = \sqrt{5 + 4b} \leq \sqrt{5 + 4} = 3$

所以若复数 z 满足 $|z| = 1$ ，则 $|z + 2i|$ 的最大值为 3 正确。

故选 BD。

8. 若 $(1+x) + (1+x)^2 + \cdots + (1+x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ ，且 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} = 125 - n$ ，则下列结论正确的是（ ）

- A. $n = 6$
- B. $(1+2x)^n$ 展开式中二项式系数和为 729
- C. $(1+x) + (1+x)^2 + \cdots + (1+x)^n$ 展开式中所有项系数和为 126
- D. $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n = 321$

【参考答案】 ACD

【试题解析】

【分析】

本题考查二项式定理的应用，属于中档题。

对于选项 A，利用赋值法令 $x = 1$ ， $x = 0$ 结合等比数列求和即可判断；对于，利用 $(1+2x)^n = (1+2x)^6$ 即可判断；对于 C，根据 $n = 6$ ，即所有系数和为 $2^{n+1} - 2 = 2^7 - 2 = 126$ 即可判断；对于 D，两边求导即可判断，

【解答】

解：对于 A，令 $x = 1$ ，可得 $2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$ ，即 $\frac{2(1-2^n)}{1-2} = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$ ，

即 $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = 2^{n+1} - 2$ ，①

令 $x = 0$ ，得 $1 + 1^2 + 1^3 + \cdots + 1^n = a_0$ ，即 $a_0 = n$ ，②由于 $(1+x)^n$ 的展开式中 $C_n^m \cdot 1^0 \cdot x^n = x^n$ ，所以 $a_n = 1$ ，③

所以① - ② - ③得： $a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} = 2^{n+1} - 2 - n - 1 = 2^{n+1} - n - 3$ ，而 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} = 125 - n$ ，

所以 $2^{n+1} - n - 3 = 125 - n$ ，解得： $n = 6$ ，故 A 正确；

对于 B，由于 $n = 6$ ，则 $(1+2x)^n = (1+2x)^6$ ，

所以展开式中二项式系数和为 $2^6 = 64$ ，故 B 错误；

对于 C，由于 $n = 6$ ，则 $(1+x) + (1+x)^2 + \cdots + (1+x)^6$ 的所有项系数为 $2^{n+1} - 2 = 2^7 - 2 = 126$ ，故 C 正确；

对于 D，由于 $n = 6$ ，

则 $(1+x) + (1+x)^2 + \cdots + (1+x)^6$

$= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_6x^6$ ，

等式两边求导得：

$1 + 2(1+x) + 3(1+x)^2 + \cdots + 6(1+x)^5$

$= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + 6a_6x^5$ ，

令 $x = 1$ ，则 $1 + 2 \times 2 + 3 \times 2^2 + \cdots + 6 \times 2^5$

$= a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + 6a_6 = 321$ ，故 D 正确。

故选 ACD。

三、填空题（共3题，每题5分，共15分）

9. 若 $\bar{z}(1-i) = 2i$ ，则 z 的虚部为_____

【参考答案】 -1

【解答】

解： $\because \bar{z}(1-i) = 2i$ ， $\therefore \bar{z} = \frac{2i}{1-i} = \frac{2i(1+i)}{(1-i)(1+i)} = -1+i$ ， 则 $z = -1-i$ ， $\therefore z$ 的虚部为 -1 。 故答案为 -1 。

10. 已知 $(1+x)^{10} = a_0 + a_1(1-x) + a_2(1-x)^2 + \cdots + a_{10}(1-x)^{10}$ ， 则 $a_8 =$ _____。

【参考答案】 180

【解答】

解： $\because (1+x)^{10} = [2-(1-x)]^{10}$
 $\therefore$ 其展开式的通项为 $T_{r+1} = C_{10}^r 2^{10-r} [-(1-x)]^r = (-1)^r \cdot 2^{10-r} \cdot C_{10}^r (1-x)^r$ ，

令 $r = 8$ 得 $a_8 = 4C_{10}^8 = 180$

故答案为 180。

11. 有7张卡片分别写有数字1,1,1,2,2,3,4, 从中任取4张，可排出不同的四位数的个数是_____

【参考答案】 114

【试题解析】 【分析】

本题考查排列组合的运用，涉及分类计数原理的应用，解题时注意其中重复的数字，属于较难题。根据题意，按取出数字是否重复分4种情况讨论：①、取出的4张卡片中没有重复数字，即取出的4张卡片中的数字为1、2、3、4，②、取出的4张卡片中有2个数字重复，则2个重复的数字为1或2，③、若取出的4张卡片为2张1和2张2，④、取出的4张卡片中有3个重复数字，则重复的数字为1，分别求出每种情况下可以排出四位数的个数，由分类计数原理计算可得答案。

【解答】

解：根据题意，分4种情况讨论：

①、取出的4张卡片中没有重复数字，即取出的4张卡片中的数字为1、2、3、4，

此时有 $A_4^4 = 24$ 种顺序，可以排出 24 个四位数；

②、取出的4张卡片中有2个数字重复，则2个重复的数字为1或2，

若重复的数字为1，在2、3、4中取出2个，有 $C_3^2 = 3$ 种取法，安排在四个位置中，有 $A_4^2 = 12$ 种情况，剩余位置安排数字1，可以排出 $3 \times 12 = 36$ 个四位数，

同理，若重复的数字为2，也可以排出 36 个重复数字；

③、若取出的4张卡片为2张1和2张2，

在4个位置安排两个1，有 $C_4^2 = 6$ 种情况，剩余位置安排两个2，

则可以排出 $6 \times 1 = 6$ 个四位数；

④、取出的4张卡片中有3个重复数字，则重复的数字为1，

在2、3、4中取出1个卡片，有 $C_3^1 = 3$ 种取法，安排在四个位置中，有 $C_4^1 = 4$ 种情况，剩余位置安排1，

可以排出 $3 \times 4 = 12$ 个四位数；

则一共有 $24 + 36 + 36 + 6 + 12 = 114$ 个四位数，

故答案为 114。

四、解答题（共3题，共45分）

12. 5名男生3名女生参加升旗仪式：

(1) 站两横排，3名女生站前排，5名男生站后排有多少种站法？

(2) 站两纵列，每列4人，每列都有女生且女生站在男生前面，有多少种排列方法？

【参考答案】

解：(1) 分两步求解：

① 先排前排的3名女生，有 $A_3^3 = 6$ 种不同的方法；

② 再排后排的5名男生，有 $A_5^5 = 120$ 种不同的方法；

由分步乘法计数原理可得共有 $A_3^3 A_5^5 = 6 \times 120 = 720$ 种不同的站法。

(2) 将3名女生分为两组，有 C_3^1 种方法，

然后选择其中的一列将1名女生排在最前的一个位置上，有 C_2^1 种方法，

然后再从5名男生中选取3名，排在该名女生的后边，有 A_5^3 种方法；

然后再排另外一列，将剩余的2名女生排在该名女生的前边有 A_2^2 种方法，

再将剩余的2名男生排在这2名女生的后边，有 A_2^2 种方法，

由分步乘法计数原理可得不同的排列方法有 $C_3^1 C_2^1 A_5^3 A_2^2 A_2^2 = 1440$ 种。

13. 已知 $(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}})^n$ 展开式的各项系数之和比 $(1-2x)^{2n}$ 展开式的二项式系数之和小 240.

(1) 求 n 的值;

(2) 求 $(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}})^n$ 展开式中系数最大的项;

(3) 求 $(1-2x)^{2n}$ 展开式的奇数项的系数之和.

【参考答案】 解: (1) $(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}})^n$ 展开式的各项系数之和为 2^n ,

$(1-2x)^{2n}$ 展开式的二项式系数之和为 2^{2n} ,

由题意可知, $2^{2n} - 2^n = 240$, $(2^n - 16)(2^n + 15) = 0$, 解得 $2^n = 16$, $2^n = -15$ (舍去), $n = 4$.

(2) 由于 $n = 4$, 由题意得展开式系数最大的项为第三项, $T_3 = C_4^2(\sqrt{x})^2(\frac{1}{\sqrt[3]{x}})^2 = 6x^{\frac{1}{3}}$.

(3) 设 $(1-2x)^8 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_8x^8$,

令 $x = 1$ 得 $1 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_8$,

令 $x = -1$ 得 $3^8 = a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + a_8$,

奇数项系数和 $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_8 = \frac{1 + 3^8}{2} = 3281$.

14. 已知函数 $f(x) = \ln x - x - \frac{m}{x}$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 令 $g(x) = me^x - x + \ln m$. 若 $g(x) > f(x) + \frac{m}{x}$ 恒成立, 求 m 的取值范围

【参考答案】 解: (1) 由 $f(x) = \ln x - x - \frac{m}{x}$, 得 $f'(x) = -\frac{x^2 - x - m}{x^2} (x > 0)$, $\Delta = 1 + 4m$,

①若 $m \leq -\frac{1}{4}$, 则 $\Delta \leq 0$, $f'(x) \leq 0$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减;

②若 $m > -\frac{1}{4}$, 则 $\Delta > 0$, 令 $f'(x) = 0$, 设两根为 $x_1 = \frac{1 - \sqrt{1 + 4m}}{2}$, $x_2 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4m}}{2}$,

(i) 若 $\sqrt{1 + 4m} < 1$, 即 $-\frac{1}{4} < m < 0$, 则 $x_1 > 0$, $x_2 > 0$,

$x \in (0, \frac{1 - \sqrt{1 + 4m}}{2})$, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

$x \in (\frac{1 - \sqrt{1 + 4m}}{2}, \frac{1 + \sqrt{1 + 4m}}{2})$, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增;

$x \in (\frac{1 + \sqrt{1 + 4m}}{2}, +\infty)$, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

(ii) 若 $\sqrt{1 + 4m} \geq 1$, 即 $m \geq 0$, 则 $x_1 \leq 0$, $x_2 > 0$,

$x \in (0, \frac{1 + \sqrt{1 + 4m}}{2})$, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增;

$x \in (\frac{1 + \sqrt{1 + 4m}}{2}, +\infty)$, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减.

综上, 当 $m \leq -\frac{1}{4}$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减;

当 $-\frac{1}{4} < m < 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, \frac{1 - \sqrt{1 + 4m}}{2})$ 和 $(\frac{1 + \sqrt{1 + 4m}}{2}, +\infty)$ 上单调递减, 在 $(\frac{1 - \sqrt{1 + 4m}}{2}, \frac{1 + \sqrt{1 + 4m}}{2})$ 上单调递增;

当 $m \geq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, \frac{1 + \sqrt{1 + 4m}}{2})$ 上单调递增, 在 $(\frac{1 + \sqrt{1 + 4m}}{2}, +\infty)$ 上单调递减.

(2) $g(x) > f(x) + \frac{m}{x}$ 恒成立, 即 $me^x + \ln m - \ln x > 0$ 恒成立,

令 $F(x) = me^x + \ln m - \ln x$, 则 $F'(x) = me^x - \frac{1}{x}$, 易知 $F'(x)$ 为增函数,

$\therefore$ 存在 $x = x_0$ 使得 $F'(x_0) = 0$, $\therefore me^{x_0} - \frac{1}{x_0} = 0$,

即 $me^{x_0} = \frac{1}{x_0}$, $\therefore \ln m + x_0 = -\ln x_0$,

$\therefore$ 原式 $= \frac{1}{x_0} + \ln m + \ln m + x_0 > 0$, 即 $x_0 + \frac{1}{x_0} > -2\ln m$,

$\therefore x_0 + \frac{1}{x_0} \geq 2\sqrt{x_0 \cdot \frac{1}{x_0}} = 2$, 当且仅当 $x_0 = 1$ 时取等号, $\therefore -2\ln m < 2$, $\ln m > -1$, $\therefore m > \frac{1}{e}$.

$\therefore m$ 的取值范围为 $(\frac{1}{e}, +\infty)$.