让体现理性精神的课堂充满生命的活力

——《任意角的三角函数》课堂实录有感

张松年　（江苏省南京市金陵中学　210005）

1　课堂实录

师：同学们好！进入高中以来，我们在“集合”的基础上学习了“函数的概念与基本初等函数Ⅰ”，研究了函数的性质及其应用.你们知道学习函数知识的意义吗？

生1：可以用函数的观点分析一些变化的现象，用函数模型刻画两个变化的量之间的依赖关系.

师：能谈谈你对“函数”概念的了解吗？

生2：设A，B是两个非空数集，如果按某种对应法则f，对于集合A中的每一个数x，在集合B中都有惟一的数y和它对应，这样的对应叫做从A到B的一个函数，其中A是这个函数的定义域，A中所有的数在B中对应的数组成的集合是函数的值域.

师：用函数来刻画一些变化的现象.那么“角的概念的推广”又有什么价值呢？

生3：可以用来刻画一些与旋转有关的现象.

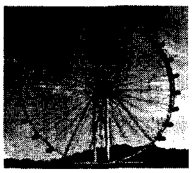

图1

师：我们是怎么研究推广以后的角的？有哪些规则？

生4：我们规定：一条射线按逆时针方向旋转所形成的角为正角，按顺时针方向旋转所形成的角为负角，没有作任何旋转也看成一个角，称为零角.把角放在直角坐标系中研究，规定将角的顶点放在坐标原点，角的始边放在x轴的正半轴上.这样，角的终边在第几象限，就说这个角是第几象限角.

师：那么如何才能准确刻画一些与旋转有关的现象呢？请看图1所示的摩天轮.假如这个摩天轮按逆时针方向运行，你的一位朋友正在摩天轮上，站在摩天轮前的你，该怎样刻画他的位置呢？

生5：可以用许多方法刻画.

师：请你谈谈看法，好吗？

生5：例如，我可以把摩天轮看作是一个圆，以摩天轮的中心为坐标原点，水平向右的方向为x轴的正方向，竖直向上的方向为y轴的正方向，建立直角坐标系.这样，当他的位置在第几象限，就表明他已经运动到摩天轮的哪个方位了.

（教师结合学生5的叙述，用几何画板演示）.

生6：不能简单地说有许多方法进行刻画，也不能模糊地说他已经运动到摩天轮的什么方位了.用数学的方法、观点研究问题，还要讲究刻画的准确性和简洁性.

师：请详细说说你的观点，好吗？

生6：可以像刚才一样建立坐标系，规定以x轴的正半轴为始边，摩天轮上的这个人对应的半径为终边的角为α.这样我们就可以用α来刻画此人的位置.

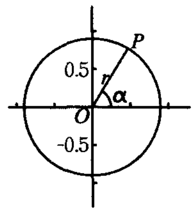

图2

生7：他的说法也不全面，还应考虑摩天轮的半径.因为摩天轮的半径r的大小也影响这个人的位置.我们可以用一个数组(r,α)来刻画这个人的位置.

师：对，必须加上摩天轮的半径r，这样刻画更准确.还有其他的想法吗？

（教师结合学生6，7的叙述，用几何画板演示如图2）

生8：还可以用直角坐标(x,y)来刻画这个人的位置.

（教师在图1的基础上，加上直角坐标系和点P的坐标(x,y)）

师：有序数组(r,α)和(x,y)都能刻画这个人的位置，这说明了什么问题？

生9：说明有序数组(r,α)和(x,y)存在内在的关系.

师：这种内在的关系是什么呢？

生10：$r=\sqrt{x^2+y^2}$.

师：这仅仅指出了r和(x,y)的关系，那么α和(x,y)的关系如何呢？

生11：当α是锐角时，$\sin\alpha=\frac{y}{r}$，$\cos\alpha=\frac{x}{r}$，$\tan\alpha=\frac{y}{x}$.

师：你能说说为什么吗？

生11：过 P 作 x 轴的垂线，垂足为 M. 在 $\mathrm{Rt}\triangle POM$ 中，$OM=x$，$MP=y$，$OP=x$，$\angle MOP=\alpha$，所以 $\sin\alpha=\frac{MP}{OP}=\frac{y}{r}$，$\cos\alpha=\frac{OM}{OP}=\frac{x}{r}$，$\tan\alpha=\frac{MP}{OM}=\frac{y}{x}$.

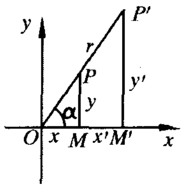

图 3

（教师在图2的基础上，隐藏圆，根据学生12的叙述作出图形，如图3）

师：对了，我们在初中学习过锐角的三角函数. 既然有锐角的三角函数，那么从知识的系统性和完备性上来看，就应该有任意角的三角函数. 如果有的话，该怎么定义“任意角的三角函数”呢？为了认识这个问题，我们从 α 是锐角开始研究该如何定义“任意角的三角函数”才合理.

（学生讨论、交流）

师：许多同学可能已经有了这样的感受和体会：在数学中，对一般性问题的研究，往往从特殊的情形入手，通过对特殊问题的研究，发现其性质，再上升到一般性的认识；对几个类似对象的研究，往往先研究其中的一个，发现其特性后，再类比到其他的对象. 这里，我们先研究锐角的三角函数中的一个——锐角的正弦函数. 当 α 是锐角时，$\sin\alpha=\frac{y}{r}$，其中，r 是锐角 α 的终边上一点 $P(x,y)$ 到原点 O 的距离，y 是其终边上一点 $P(x,y)$ 的纵坐标. 当锐角 α 确定时，$\sin\alpha$ 与锐角 α 的终边上的点 $P(x,y)$ 的选取有关吗？

生12：$\sin\alpha$ 与锐角 α 的终边上的点 $P(x,y)$ 的选取无关. 这是由三角形的相似性决定的. 在锐角 α 的终边上任取一点 $P'(x',y')$ 异于点 P，过 P' 作 x 轴的垂线，垂足为 M'.

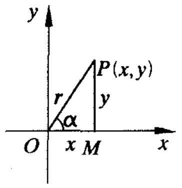

图 4

由 $\triangle P'OM'\backsim\triangle POM$，得 $\frac{M'P'}{OP'}=\frac{MP}{OP}$，即 $\frac{y'}{r'}=\frac{y}{r}$，从而 $\sin\alpha$ 与锐角 α 的终边上的点 $P(x,y)$ 的选取无关. 当然，点 P 不能是原点.

（教师在图3的基础上，根据学生12的叙述作出图4）

师：这就说明，当锐角 α 确定，则其终边上的点 P 的纵坐标 y 与该点到原点的距离 r 的比值 $\frac{y}{r}$ 也确定. 这样，我们就得到了一个对应：$\alpha\to\frac{y}{r}$，这个对应是我们学过的什么对应关系呢？

生13：是“映射”！

师：为什么是映射呢？

生13：因为锐角 α 是一个图形，对任意一个图形 α，都有惟一的实数 $\frac{y}{r}$ 与之对应，符合映射的定义.

师：是的. 我们在学习“角的概念的推广”时，已经约定，角也可以用实数来表示. 如果这里的锐角 α 不是指一个图形，而是指一个锐角的大小，这样的映射具有怎样的特殊性呢？

生13：是区间 $(0,\frac{\pi}{2})$ 到实数集 $\mathbf{R}$ 的一个函数.

师：那么这个函数的对应法则是什么呢？

生14：对应法则是：角的终边上的点的纵坐标与该点到原点的距离的比值.

（教师根据学生13、14的叙述板书、作示意图，如图5）

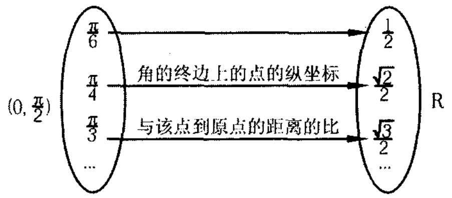

图 5

师：这是一个特殊的函数“$f(\alpha)$”，其中对应法则“f”是指“角的终边上的点的纵坐标与该点到原点的距离的比”，记作“sin”. 这个函数习惯上记作“$\sin\alpha$”. 那么，当 α 是任意角时，其终边上的点 P 的纵坐标 y 与该点到原点的距离 r 的比值 $\frac{y}{r}$ 也是 α 的函数吗？

生15：是的. 当 α 是任意角时，只要 α 确定，那么其终边也确定，其终边上的点 P 的纵坐标 y 与 P 到原点的距离为 r 的比值 $\frac{y}{r}$ 的符号和绝对值都确定，因此 $\frac{y}{r}$ 的值也确定.

师：这样，我们就得到了一个新的函数：$\alpha\to\frac{y}{r}$. 请问：这个函数的定义域是什么？对应法则是什么？这个函数和函数 $\sin\alpha$，$\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$ 有什么关系？

生16：这个函数的定义域是 $\mathbf{R}$，对应法则是：终边上的点的纵坐标与该点到原点的距离的比值. 这个函

数和函数 $\sin\alpha, \alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ 的关系是:前者的定义域包含了后者的定义域,即 $(0, \frac{\pi}{2}) \subseteq \mathbf{R}$,对应法则相同.

师:我们该给这个 $\mathbf{R}$ 上的函数的对应法则一个什么记号,给这个函数一个什么名称呢?

生 17:根据以上分析,这个函数仍然应该记为 $\sin\alpha$,其中 $\alpha \in \mathbf{R}$,并把它称为 α 的正弦函数.否则,从知识系统的和谐性来看,若这个函数取其他名字,当 α 是锐角时,就会引起混淆.

师:有道理.其实,许多数学概念也是遵循类似的合理性而命名的.类似地,我们也可以得到任意角的余弦函数、正切函数.

(教师板书)一般地,角 α 的终边上任意一点 P 的坐标是 (x,y),它与原点的距离是 r(其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}>0$).规定:

比值 $\frac{y}{r}$ 叫做角 α 的正弦,记作 $\sin\alpha=\frac{y}{r}$;

比值 $\frac{x}{r}$ 叫做角 α 的余弦,记作 $\cos\alpha=\frac{x}{r}$;

比值 $\frac{y}{x}$ 叫做角 α 的正切,记作 $\tan\alpha=\frac{y}{x}$.

师:你能根据 $\sin\alpha, \cos\alpha, \tan\alpha$ 的定义,结合角 α 的终边的位置,分别指出这三个函数的定义域吗?

生 18:对于角 α 的终边上任意一点 $P(x,y)$,由于 $r=\sqrt{x^2+y^2}>0$,所以 $\sin\alpha=\frac{y}{r}$ 总有意义,所以正弦函数 $\sin\alpha$ 的定义域为 $\mathbf{R}$.

同样,余弦函数 $\cos\alpha$ 的定义域也为 $\mathbf{R}$.

而对于正切函数 $\tan\alpha$,当角 α 的终边在 y 轴上时,由于 $\frac{y}{x}$ 不存在,所以 $\tan\alpha$ 不存在;当 α 的终边不在 y 轴上时,比值 $\frac{y}{x}$ 惟一确定,故 $\tan\alpha$ 有意义.因此,正切函数 $\tan\alpha$ 的定义域为 $\{\alpha \mid \alpha \in \mathbf{R}, \alpha \neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$.

师:正弦、余弦、正切都是以角的大小为自变量,以比值为函数值的函数.必须注意的是:

(1)与初中学的三角函数比较,三角函数中角的范围扩大了;

(2)三角函数是以"实数"为自变量的函数,即"实数 $\rightleftharpoons$ 角 $\rightleftharpoons$ 三角函数值(实数)".

练习 1 已知角 α 的终边经过点 $(2,-3)$,求 α 的正弦、余弦、正切值.

(教师引导学生分析、解答、板书)

师:结合此例,你能总结出"求一个角的三角函数值"的一般步骤吗?

生 19:一般步骤是:

第一步:取角终边上的一点,写出其坐标 (x, y);

第二步:求出该点到坐标原点的距离 $r=\sqrt{x^2+y^2}$;

第三步:求出三个比值 $\sin\alpha=\frac{y}{r}$,$\cos\alpha=\frac{x}{r}$,$\tan\alpha=\frac{y}{x}$.

师:通过此例中角 α 的正弦、余弦、正切值,你还发现了什么?你能指出一般性的规律吗?

生 20:一个角的三角函数值有正负之分.对于角 α,其终边上一点 P 的坐标是 (x,y),它与原点的距离是 $r=\sqrt{x^2+y^2}$.由于 $r>0$,所以,角 α 的正弦 $\sin\alpha=\frac{y}{r}$ 的符号由 y 的符号确定.当 $y>0$,即 α 的终边在 x 轴上方时,$\sin\alpha>0$;当 $y<0$,即 α 的终边在 x 轴下方时,$\sin\alpha<0$;当 $y=0$,即 α 的终边在 x 轴上时,$\sin\alpha=0$.

类似地,角 α 的余弦 $\cos\alpha$ 的符号由 x 的符号确定,当 $x>0$,即 α 的终边在 y 轴右方时,$\cos\alpha>0$;当 $x<0$,即 α 的终边在 y 轴左方时,$\cos\alpha<0$;当 $x=0$,即 α 的终边在 y 轴上时,$\cos\alpha=0$.

角 α 的正切 $\tan\alpha=\frac{y}{x}$ 的符号由 x, y 的符号确定,当 x, y 同号,即 α 的终边在第一或第三象限时,$\tan\alpha>0$;当 x, y 异号,即 α 的终边在第二或第四象限时,$\tan\alpha<0$,当 $y=0$,即 α 的终边在 x 轴上时,$\tan\alpha=0$.(图示略).

练习 2 确定下列三角函数值的符号:

(1) $\sin\frac{13\pi}{12}$; (2) $\cos\frac{14\pi}{3}$;

(3) $\tan(-\frac{24\pi}{7})$; (4) $\sin 1\,160°$.

(学生板演,教师总结、点评,指导规范书写)

师:今天,我们学习了任意角的三角函数的定义.回顾学习过程,你有哪些体会?

生 21:从实际问题解决的过程中发现数学.

生 22:用到了从特殊到一般的方法和数形结合的思想.

生 23:用函数的观点理解三角函数.

生 24:围绕三角函数的意义,结合角的终边的位置,判断三角函数的定义域和三角函数值的符号.

生 25：老师，能不能问个问题：对于角 α 而言，其中边上任意一点 $P(x,y)$ 到原点的距离为 r，α 的三个三角函数值分别是 x,y,r 这三个量中两个的比值，为什么不研究 $\frac{r}{y}$，$\frac{r}{x}$，$\frac{x}{y}$ 这三个比值？它们也应该是函数呀！

师：很好，这位同学提出的问题很有意义，很合理. 正像他所说，$\frac{r}{x}$，$\frac{r}{y}$，$\frac{x}{y}$ 这三个比值分别称为 α 的正割、余割、余切，分别记为 $\sec\alpha=\frac{r}{x}$，$\csc\alpha=\frac{r}{y}$，$\cot\alpha=\frac{x}{y}$. 有兴趣的同学可以在课后研究 α 的这三个三角函数值和 α 的正弦、余弦、正切之间的关系.

（课后，学生仍然积极与教师进行探讨）

2　课后分析

事实上，本节课的发展与教师的准备是有些出入的，甚至有些学生提出的问题是教师事先没有准备的. 如

(1) 教师本来设想学生会举出许多刻画点的位置的方法，但学生自主提出"用数学的方法、观点研究问题，还要讲究刻画的准确性和简洁性"，说明学生已经具有一定的数学地研究问题的修养和体验.

(2) 对"摩天轮上一个点可以用有序数组 (r,α) 来表示"，教师设计时认为学生会忽视摩天轮的半径 r，教学过程中，学生主动认识到了点的位置与摩天轮的半径 r 有关，表明学生观察、思考问题还是比较深刻的.

(3) 对"同一个点可以用两个不同的有序数组 (r,α) 和 (x,y) 来刻画，是否隐含了这两个有序数组之间存在内在的联系"，教师本想让学生找几个特殊点算一算，进行观察、探索，而事实是学生自然感觉到了两者之间必然存在关系.

(4)"研究 (r,α) 和 (x,y) 的关系"，这是一个很宽泛的问题，教师的设想是找几个特殊角试试，再一般化. 教学过程中，学生首先提出了"当 α 是锐角时，$\sin\alpha=\frac{y}{r}$". 这说明，学生对运用"从特殊到一般性"的方法研究问题的方法还是有基础的.

(5) 当 α 是锐角时，学生指出"对应：$\alpha\to\frac{y}{r}$"是映射，这一点是出乎教师想象的. 一般而言，学生对"映射"这个概念不是很熟悉，能指出这个对应是映射已属不易，而强调这个对应是映射的理由是"锐角 α 是一个图形，这是图形到数的对应"，回答得这么准确，就更表明学生对"函数"和"映射"的关系已经认识得相当深刻. 同时，也反映了学生对"角也可以用一个数表示"还不怎么理解，毕竟，前一天才学过用弧度制表示角.

(6) 关于"对应：$\alpha\to\frac{y}{r}$，$\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$ 表示的是一个从区间 $(0,\frac{\pi}{2})$ 到实数集 $\mathbf{R}$ 的一个函数"的对应法则的描述，教师设想学生会有困难，但学生却描述得相当准确.

(7) 由对应法则的一致性和定义域的关系，学生从函数的观点出发，给出了正弦函数一般性的定义，再一次体现了学生对数学概念产生、命名的合理性的认识已经到了相当的水平.

(8) 例题除了让学生体会"求一个角的三角函数值"的算法思想，认识三角函数的意义，也作为"问题情境"，使学生得到启发，感受到有必要研究"一个角的三角函数值的符号与角的关系".

(9) 课堂回顾体现了学生对整节课内容的深刻理解. 最后一个学生提出的问题，说明学生的认识活动仍在继续，思维远没有停止. 尽管现行的教材已经将这部分内容删除，但作为教学过程，对学生提出的合理要求，教师应给予充分的肯定.

3　课后思考

同一个知识点，老师上了多遍，自然会形成某种教学积淀："知识还是那知识，教法也还是那教法"，不知不觉进入"教师讲，学生听"的既定模式. 在"以学生的发展为最终目的"的教育理念普遍为大众所接受的今天，教师应主动调整教学方法，重视课堂教学中生命的灵动. 当学生的的发展离开了教师事先设想的轨迹时，教师不应强行把学生的思维拉回来，而应顺势利导地沿着学生的思维路线，鼓励学生继续探究，这样才能尊重学生在发展过程中的主体地位，激起学生思维的火花. 在课堂中，教师的角色只是一个主持人，其一切行为都应以促进学习，让学生感受、体会知识产生的过程，是自然获得，而不是幡然领悟. 只有这样，才能真正体现数学的理性精神，体现"以人为本"的教育理念.

参考文献

[1] 单墫. 普通高中课程标准实验教科书·数学 4(必修)[M]. 南京：江苏教育出版社，2009.
[2] 樊亚东. 从一个案例谈让学生经历知识发展过程的意义[J]. 数学通报，2001(11).