透过现象看本质:由2461问题引发的探究

张为康　吴思怀

(南京师范大学数学科学学院　210023)

《数学通报》2461问题是一个三角函数求和问题,它本质上是一个数论问题,本文将从初等数论的角度提出一般化的定理并给出详细证明.

1　原命题概述

《数学通报》数学问题2461:$\cos\frac{\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{9\pi}{13}=\frac{1+\sqrt{13}}{4}$. 作者构造了 $x=\cos\frac{\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{9\pi}{13}$,$y=\cos\frac{5\pi}{13}+\cos\frac{7\pi}{13}+\cos\frac{11\pi}{13}$,证明了 $x+y=\frac{1}{2}$,$xy=-\frac{3}{4}$,转化为一元二次方程两根的问题.

2　问题一般化

作者这样的构造方法很巧妙,往往很难想到,但从其本质来看就会觉得很自然.

观察解题过程中 x,y 的构造,很容易联想到单位根的有限和,即高斯和的相关内容.代数式中 π 前面的系数1,3,4,9,10,12为mod13的二次剩余,2,5,6,7,8,11为mod13的二次非剩余,而在数论中,二次剩余与二次非剩余联系紧密,所以构造 y 与 x 进行配对计算,在数论中是自然而然的想法.原问题中13作为一个素数,不失一般性,而在二次剩余内容中,$4n+1$ 型素数与 $4n+3$ 型素数的性质又有本质上的差别.

综合以上考虑,将原问题进行一般化的推广,得到以下定理.

定理　设 p 是 $4n+1$ 型素数,$\exists\, 1\leqslant k_1\leqslant k_2\leqslant\cdots\leqslant k_n\leqslant 4n$,其中 $k_i\in\mathbf{Z}(i=1,2,\cdots,n)$,使得 $\sum\limits_{i=1}^{n}\cos\frac{k_i\pi}{4n+1}=\frac{-1+\sqrt{4n+1}}{4}$.

3　证明定理

为了证明这一定理,先给出初等数论中的一些基本定义和引理.

定义1　设素数 $p>2$,d 是整数,$p\nmid d$.如果同余方程 $x^2\equiv d(\mathrm{mod}\,p)$ 有解,则称 d 是模 p 的二次剩余;若无解,则称 d 是模 p 的二次非剩余.

引理1　在模 p 的一个既约剩余系中,恰有 $\frac{p-1}{2}$ 个模 p 的二次剩余,$\frac{p-1}{2}$ 个模 p 的二次非剩余.

引理2　设素数 $p>2$,$p\nmid d_1$,$p\nmid d_2$,那么,

(1)若 d_1,d_2 均为模 p 的二次剩余,则 d_1d_2 也是模 p 的二次剩余;

(2)若 d_1,d_2 均为模 p 的二次非剩余,则 d_1d_2 也是模 p 的二次剩余;

(3)若 d_1 是模 p 的二次剩余,d_2 是模 p 的二次非剩余,则 d_1d_2 是模 p 的二次非剩余.

引理3　-1 是模 p 的二次剩余的充要条件是 $p\equiv1(\mathrm{mod}\,4)$.

下面对此定理进行严格的论证.

证明　因$\{1,2,\cdots,4n\}$是模 p 的一个既约剩余系,由引理1不妨设 $M=\{s_1,s_2,\cdots,s_{2n}\}$ 是$\{1,2,\cdots,4n\}$中的所有模 p 二次剩余的集合,设 $N=\{t_1,t_2,\cdots,t_{2n}\}$ 是$\{1,2,\cdots,4n\}$中的所有模 p 二次非剩余的集合.令

$$A=A(\zeta_p)=\sum_{i=1}^{2n}\zeta_p^{s_i},B=B(\zeta_p)=\sum_{i=1}^{2n}\zeta_p^{t_i},$$

其中 $\zeta_p=\cos\frac{2\pi}{p}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{p}$.

易知 $A+B=\sum\limits_{i=1}^{4n}\zeta_p^{i}=-1$,

设 $f(\zeta_p)=A(\zeta_p)B(\zeta_p)$,由引理2和引理3,$\forall k_i\in M,t_j\in N,\zeta_p^{k_i+t_j}\neq1$.

因此可设 $f(\zeta_p)=a_1\zeta_p+a_2\zeta_p^2+\cdots+a_{4n}\zeta_p^{4n}$.

由引理2,对 $\forall c\in\{1,2,\cdots,4n\}$,

若 $c\in M$,$\forall s_i\in M(1\leqslant i\leqslant 2n)$,$cs_i$ 是模 p 的二次剩余,且两两互异,则 $A(\zeta_p)=A(\zeta_p^c)$,$\forall t_i\in N(1\leqslant i\leqslant 2n)$,$ct_i$ 是模 p 的二次非剩余,且两两互异,则 $B(\zeta_p)=B(\zeta_p^c)$;

若 $c\in N$，$\forall s_i\in M(1\leqslant i\leqslant 2n)$，$cs_i$ 是模 p 的二次非剩余，且两两互异，则 $A(\zeta_p)=B(\zeta_p)$，$\forall t_i\in N(1\leqslant i\leqslant 2n)$，$ct_i$ 是模 p 的二次剩余，且两两互异，则 $B(\zeta_p)=A(\zeta_p)$.

故必有 $f(\zeta_p)=f(\zeta_p)$.

于是得到 $4n$ 个等式

$$\begin{cases}f(\zeta_p)=a_1\zeta_p+a_2\zeta_p^2+\cdots+a_{4n}\zeta_p^{4n}\\ f(\zeta_p^2)=a_1\zeta_p^2+a_2(\zeta_p^2)^2+\cdots+a_{4n}(\zeta_p^2)^{4n}\\ \cdots\\ f(\zeta_p^{4n})=a_1\zeta_p^{4n}+a_2(\zeta_p^{4n})^2+\cdots+a_{4n}(\zeta_p^{4n})^{4n}\end{cases},$$

将这 $4n$ 个式子左右两边相加，得

$$4nf(\zeta_p)=(a_1+a_2+\cdots+a_{4n})(\zeta_p+\zeta_p^2+\cdots+\zeta_p^{4n})=-(a_1+a_2+\cdots+a_{4n}),$$

又 $a_1+a_2+\cdots a_{4n}=4n^2$，则 $AB=f(\zeta_p)=-n$.

故由方程组 $\begin{cases}AB=-n\\A+B=-1\end{cases}$ 知，

A,B 是方程 $x^2+x-n=0$ 的两根.

设 $A=\dfrac{-1+\sqrt{4n+1}}{2}$，

则 $$\frac{-1+\sqrt{4n+1}}{2}=A=\sum_{i=1}^{2n}\cos\frac{2s_i\pi}{4n+1}+\mathrm{i}\sum_{i=1}^{2n}\sin\frac{2s_i\pi}{4n+1}.$$

实部相等可得，

$$\frac{-1+\sqrt{4n+1}}{2}=\sum_{i=1}^{2n}\cos\frac{2s_i\pi}{4n+1}.$$

由引理 3，-1 是模 p 的二次剩余，于是 $4n+1-s_i(i=1,2,\cdots,2n)$ 也是模 p 的二次剩余，且 $s_i\neq 4n+1-s_i$，即 s_i 与 $4n+1-s_i$ 在集合 M 中成对出现. 不妨设 $s_{i+n}=4n+1-s_i(1\leqslant i\leqslant n)$，由抽屉原理知 $\min\{s_i,4n+1-s_i\}\leqslant 2n$. 令 $k_i=2\min\{s_i,4n+1-s_i\}(1\leqslant i\leqslant 4n)$，则 $1\leqslant k_i\leqslant 4n$，且

$$\begin{aligned}A&=\frac{-1+\sqrt{4n+1}}{2}=\sum_{i=1}^{2n}\cos\frac{2s_i\pi}{4n+1}\\&=2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\cos\frac{2s_i\pi}{4n+1}+\cos\frac{2(4n+1-s_i)\pi}{4n+1}\right)\\&=2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\cos\frac{k_i\pi}{4n+1}+\cos\frac{k_i\pi}{4n+1}\right)\\&=2\sum_{i=1}^{n}\cos\frac{k_i\pi}{4n+1},\end{aligned}$$

这样就找到了 n 个符合条件的数，定理得证.

若 $B=\dfrac{-1+\sqrt{4n+1}}{2}$，只需考虑集合 N，也可以得到这样的结论.

4 推论与推广

由上面的证明过程，还可以得到以下推论.

推论 当 p 是 $4n+1$ 型素数，$\exists 1\leqslant k_1\leqslant k_2\leqslant\cdots\leqslant k_n\leqslant 4n$，其中 $k_i\in\mathbf{Z}(i=1,2,\cdots,n)$，使得 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\cos\frac{k_i\pi}{4n+1}=\frac{-1-\sqrt{4n+1}}{4}$.

只需在定理的证明过程中考虑 $A=\dfrac{-1-\sqrt{4n+1}}{2}$ 的情况即可.

考虑完 $4n+1$ 型素数，自然而然会联想到 $4n+3$ 型素数，这一证明同定理证明过程类似，但此时的 $f(\zeta_p)$ 含有常数 $2n+1$，得到的关于 A、B 的方程组为 $\begin{cases}A+B=-1\\AB=n+1\end{cases}$. 则 A、B 是方程 $x^2+x+(n+1)=0$ 的两根，从而有：

推广 当 p 是 $4n+3$ 型素数，$\exists 1\leqslant h_1\leqslant h_2\leqslant\cdots\leqslant h_n\leqslant 4n+2$，使得

$$\sum_{i=1}^{2n+1}\cos\frac{2h_i\pi}{4n+3}=-\frac{1}{2},$$

$$\sum_{i=1}^{2n+1}\sin\frac{2h_i\pi}{4n+3}=\pm\frac{\sqrt{4n+3}}{2},$$

其中 $h_i\in\mathbf{Z}(i=1,2,\cdots,2n+1)$.

5 回顾与反思

原例题中 $\cos\dfrac{\pi}{13},\cos\dfrac{3\pi}{13},\cos\dfrac{9\pi}{13}$ 可以看成是

$$-\cos\frac{12\pi}{13},-\cos\frac{10\pi}{13},-\cos\frac{4\pi}{13},$$

由于 2,5,6 为模 13 意义下的二次非剩余，利用推论知

$$-(\cos\frac{12\pi}{13}+\cos\frac{10\pi}{13}+\cos\frac{4\pi}{13})=-(\frac{-1-\sqrt{13}}{4}),$$

原命题得证.

《数学通报》2461 问题的探究证明可以从数论中找到理论依据，有兴趣的读者可以从高斯和理论中找到更一般的推广.

参考文献

[1]贺斌，龚为民. 数学问题解答[J]. 数学通报，2019，58(2)：63－64

[2]潘承洞，潘承彪. 简明数论[M]. 北京：北京大学出版社，1998：163－168

[3]Melvyn B. Nathanson. Elementary Methods in Number Theory[M]. Springer New York：2000：150－169