江苏省仪征中学 2019-2020 学年第一学期高三数学
中档大题训练（2）　　9.13

班级 ______________　　　　　　　　姓名________________

1．在△ABC中，内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，$\cos B=\frac{4}{5}$．

（1）若 $c=2a$，求$\frac{\sin B}{\sin C}$的值；

（2）若 $C-B=\frac{\pi}{4}$，求 $\sin A$ 的值．

2. 已知二次函数 $f\left(x\right)$满足 $f\left(x+1\right)-f\left(x\right)=2x\left(x\in R\right)$，且 $f\left(0\right)=1$。

（1）求 $f\left(x\right)$的解析式；

（2）当$x\in\left[-1,1\right]$时，不等 $f\left(x\right)>2x+m$式恒成立，求实数m的取值范围；

（3）设$g\left(t\right)=f\left(2t+a\right)$，$t\in\left[-1,1\right]$, 求$g\left(t\right)$的最大值。

3. 若函数 $f(x)+g(x)$ 和 $f(x)\cdot g(x)$ 同时在 $x=t$ 处取得极小值，则称 $f(x)$ 和 $g(x)$ 为一对“$P(t)$ 函数”.

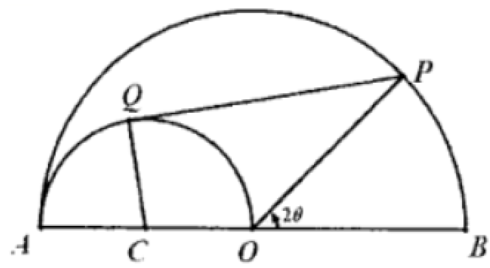
（1）试判断 $f(x)=x$ 与 $g(x)=x^2+ax+b$ 是否是一对“$P(1)$ 函数”；

（2）若 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 与 $g(x)=x^2+ax+1$ 是一对“$P(t)$ 函数”,求 a 和 t 的值.

4. 某广告商租用了一块如图所示的半圆形封闭区域用于产品展示，该封闭区域由以 O 为圆心的半圆及直径 AB 围成．在此区域内原有一个以 OA 为直径、C 为圆心的半圆形展示区，该广告商欲在此基础上，将其改建成一个凸四边形的展示区 COPQ，其中 P、Q 分别在半圆 O 与半圆 C 的圆弧上，且 PQ 与半圆 C 相切于点 Q．已知 AB 长为 40 米，设∠BOP 为 2θ．（上述图形均视作在同一平面内）

（1）记四边形 COPQ 的周长为 $f(\theta)$，求 $f(\theta)$ 的表达式；

（2）要使改建成的展示区 COPQ 的面积最大，求 $\sin\theta$ 的值．



江苏省仪征中学 2019-2020 学年第一学期高三数学
中档大题训练（2）答案 9.13

1．解：（1）解法 1

在$\triangle ABC$中，因为 $\cos B=\dfrac{4}{5}$，所以$\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{4}{5}$． ………………………2 分

因为 $c=2a$，所以$\dfrac{(\frac{c}{2})^2+c^2-b^2}{2c\times\frac{c}{2}}=\dfrac{4}{5}$，即$\dfrac{b^2}{c^2}=\dfrac{9}{20}$，

所以$\dfrac{b}{c}=\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$． ……………………………4 分

又由正弦定理得$\dfrac{\sin B}{\sin C}=\dfrac{b}{c}$，

所以$\dfrac{\sin B}{\sin C}=\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$． ……………………………6 分

解法 2

因为 $\cos B=\dfrac{4}{5}$，$B\in(0，\pi)$，所以 $\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\dfrac{3}{5}$． ………………………2 分

因为 $c=2a$，由正弦定理得 $\sin C=2\sin A$，

所以 $\sin C=2\sin(B+C)=\dfrac{6}{5}\cos C+\dfrac{8}{5}\sin C$，

即 $-\sin C=2\cos C$． ………………………4 分

又因为 $\sin^2 C+\cos^2 C=1$，$\sin C>0$，解得 $\sin C=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，

所以$\dfrac{\sin B}{\sin C}=\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$． ………………………6 分

（2）因为 $\cos B=\frac{4}{5}$，所以 $\cos 2B=2\cos^2 B-1=\frac{7}{25}$． …………………………8 分

又 $0<B<\pi$，所以 $\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\frac{3}{5}$，

所以 $\sin 2B=2\sin B\cos B=2\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{24}{25}$． …………………………10 分

因为 $C-B=\frac{\pi}{4}$，即 $C=B+\frac{\pi}{4}$，所以 $A=\pi-(B+C)=\frac{3\pi}{4}-2B$，

所以 $\sin A=\sin(\frac{3\pi}{4}-2B)$

$=\sin\frac{3\pi}{4}\cos 2B-\cos\frac{3\pi}{4}\sin 2B$ ………………………………12 分

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{7}{25}-(-\frac{\sqrt{2}}{2})\times\frac{24}{25}$

$=\frac{31\sqrt{2}}{50}$． …………………………………14 分

2．【解析】（1）设 $f(x)=ax^2+bx+c\left(a\neq 0\right)$，代入 $f(x+1)-f(x)=2x$ 和 $f(0)=1$，

并化简得 $\begin{cases}2ax+a+b=2x\left(x\in R\right),\\ c=1\end{cases}$，$\therefore a=1.b=-1,c=1,\ \therefore\ f(x)=x^2-x+1$。

（2）当 $x\in[-1,1]$ 时，不等 $f(x)>2x+m$ 式恒成立即不等式 $x^2-3x+1>m$ 恒成立，

令 $g(x)=x^2-3x+1$，则 $g(x)=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$，当 $x\in[-1,1]$ 时，$g(x)_{\min}=-1$，$\therefore m<-1$。

（3）$g(t)=f(2t+a)=4t^2+(4a-2)t+a^2-a+1,t\in[-1,1]$,对称轴是 $x=\frac{1-2a}{4}$。

①当 $\frac{1-2a}{4}\geq 0$ 时，即 $a\leq\frac{1}{2}$ 时，$g(t)_{\max}=g(-1)=4-(4a-2)+a^2-a+1=a^2-5a+7$；

②当 $\frac{1-2a}{4}<0$ 时，即 $a>\frac{1}{2}$ 时，$g(t)_{\max}=g(1)=4+(4a-2)+a^2-a+1=a^2+3a+3.$

综上所述：$g\left(t\right)_{\max}=\begin{cases}a^2-5a+7, & a\le\dfrac{1}{2},\\ a^2+3a+3, & a>\dfrac{1}{2}.\end{cases}$。

3.【解析】令$h_1(x)=f(x)+g(x),h_2(x)=f(x)\cdot g(x)$.

（1）易得$h_1{}'(x)=2x+a+1,h_2{}'(x)=3x^2+2ax+b$，

若$f(x)=x$与$g(x)=x^2+ax+b$是一对"$P(1)$函数".

则$\begin{cases}h_1{}'(1)=a+3=0\\ h_2{}'(1)=2a+3+b=0\end{cases}$，即$\begin{cases}a=-3\\ b=3\end{cases}$.

此时，$h_2{}'(x)=3x^2-6x+3=3(x-1)^2\geqslant0$，$h_2(x)$无极小值，

故$f\left(x\right)=x$与$g\left(x\right)=x^2+ax+b$不是一对"$P(1)$函数".

（2）①$h_1(x)=\mathrm{e}^x+x^2+ax+1$，$h_2(x)=\mathrm{e}^x\cdot\left(x^2+ax+1\right)$，

$h_1{}'(x)=\mathrm{e}^x+2x+a$，$h_2{}'(x)=\mathrm{e}^x\cdot\left[x^2+(a+2)x+a+1\right]=\mathrm{e}^x\cdot(x+1)(x+a+1)$，

若$f(x)=\mathrm{e}^x$与$g(x)=x^2+ax+1$是一对"$P\left(t\right)$函数"，

由$h_2{}'(x)=\mathrm{e}^x\cdot(x+1)(x+a+1)=0$，得$x_1=-1,x_2=-a-1$，

1.若$a>0$，则有

x	$(-\infty,-a-1)$	$-a-1$	$(-a-1,-1)$	-1	$(-1,+\infty)$

$h_2'(x)$	+	0	−	0	+
$h_2(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

因为$h_2(x)$在$x=t$处取得极小值，所以$t=-1$，

从而$h_1'(-1)=\mathrm{e}^{-1}-2+a=0$，$a=2-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

经验证知$h_1(x)=\mathrm{e}^x+x^2+\left(2-\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)x+1$在$x=-1$处取得极小值，

所以$\begin{cases}a=2-\dfrac{1}{\mathrm{e}}\\t=-1\end{cases}$；

2.当$a<0$时，则有

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,-a-1)$	$-a-1$	$(-a-1,+\infty)$
$h_2'(x)$	+	0	−	0	+
$h_2(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

因为$h_2(x)$在$x=t$处取得极小值，所以$t=-a-1$；

从而$h_1'(-a-1)=\mathrm{e}^{-a-1}-a-2=0$，

令$\varphi(a)=\mathrm{e}^{-a-1}-a-2,a<0$，则易得$\varphi(a)$在$(-\infty,0)$上是减函数，且$\varphi(-1)=0$，

所以$a=-1$，从而$\begin{cases}a=-1\\t=0\end{cases}$.

经验证知$h_1(x)=\mathrm{e}^x+x^2-x+1$在$x=0$处取得极小值，所以$\begin{cases}a=-1\\t=0\end{cases}$.

3.当$a=0$时，$h_2'(x)=\mathrm{e}^x\cdot(x+1)^2\geqslant 0$，$h_2(x)$是增函数，无极小值，与题设不符.

综上所述：$\begin{cases}a=2-\dfrac{1}{\mathrm{e}}\\t=-1\end{cases}$或$\begin{cases}a=-1\\t=0\end{cases}$.

4. 解：(1) 连结 PC.由条件得 $\theta\in(0,\dfrac{\pi}{2})$.

在△POC 中，OC＝10，OP＝20，∠POC＝π－2θ，由余弦定理，得

$PC^2=OC^2+OP^2-2OC\cdot OP\cos(\pi-2\theta)=100(5+4\cos 2\theta)$．(2 分)

因为 PQ 与半圆 C 相切于点 Q，所以 CQ⊥PQ，

所以 $PQ^2=PC^2-CQ^2=400(1+\cos 2\theta)$，所以 $PQ=20\sqrt{2}\cos\theta$.(4 分)

所以四边形 COPQ 的周长为 $f(\theta)=CO+OP+PQ+QC=40+20\sqrt{2}\cos\theta$，

即 $f(\theta)=40+20\sqrt{2}\cos\theta$，$\theta\in(0,\dfrac{\pi}{2})$．(7 分)

(没写定义域，扣 2 分)

(2) 设四边形 COPQ 的面积为 S(θ)，则

$S(\theta)=S_{\triangle OCP}+S_{\triangle QCP}=100(\sqrt{2}\cos\theta+2\sin\theta\cos\theta)$，$\theta\in(0,\dfrac{\pi}{2})$．(10 分)

所以 $S'(\theta)=100(-\sqrt{2}\sin\theta+2\cos^2\theta-2\sin^2\theta)=100(-4\sin^2\theta-\sqrt{2}\sin\theta+2)$，$\theta\in(0,\dfrac{\pi}{2})$．(12 分)

令 $S'(t)=0$，得 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{34}-\sqrt{2}}{8}$.

列表：

sin θ	$(0,\dfrac{\sqrt{34}-\sqrt{2}}{8})$	$\dfrac{\sqrt{34}-\sqrt{2}}{8}$	$(\dfrac{\sqrt{34}-\sqrt{2}}{8},1)$
S′(θ)	＋	0	－
S(θ)	增	最大值	减

答：要使改建成的展示区 COPQ 的面积最大，sin θ的值为$\dfrac{\sqrt{34}-\sqrt{2}}{8}$.(14 分)