仪征中学 2020 届数学一轮复习补偿训练（12）12.17

一、填空题：

1．图 1 是某学生的数学考试成绩茎叶图，第 1 次到第 14 次的考试成绩依次记为 A_1，A_2，…，A_{14}．图 2 是统计茎叶图中成绩在一定范围内考试次数的一个算法流程图．那么算法流程图输出的结果是________．

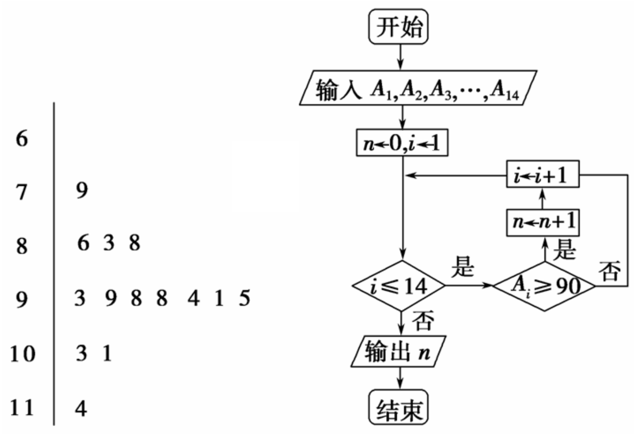


图 1　　　　图 2

2．一只蚂蚁在边长分别为 $5,6,\sqrt{13}$ 的三角形区域内随机爬行，则其恰在离三个顶点距离都大于 1 的地方的概率为____________．

3．若函数 $y=|x|-2$ 的图象与圆 $C: x^2+y^2=\lambda$ 没有公共点，则实数 λ 的取值范围是____________．

4．已知 $xy>0$，则 $\left|x+\dfrac{1}{2y}\right|+\left|y+\dfrac{1}{2x}\right|$ 的最小值为____________．

5．设 $a\in\mathbf{R}$，若 $x>0$ 时均有 $\left[(a-1)x-1\right]\left(x^2-ax-1\right)\geqslant 0$，则 $a=$____________．

6．设函数 $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$，对任意 $x\in[1,+\infty)$, $f(mx)+mf(x)<0$ 恒成立，则实数 m 的取值范围是____________ ．

二、解答题：

7. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $A(-3,4), B(9,0)$，C，D 分别为线段 OA，OB 上的动点，且满足 $AC=BD$.

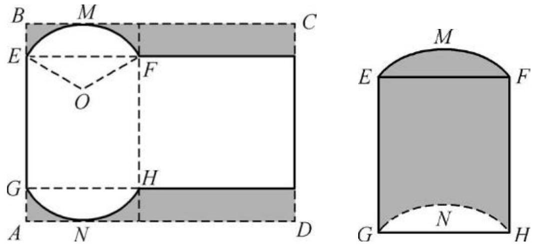
（1）若 $AC=4$，求直线 CD 的方程;

（2）证明：ΔOCD 的外接圆恒过定点(异于原点 O).

8. 有一矩形硬纸板材料(厚度忽略不计),一边 AB 长为 6 dm,另一边足够长.现从中截取矩形 ABCD(如图(1)所示),再剪去图中阴影部分,用剩下的部分恰好能折卷成一个底面是弓形的柱体包装盒(如图(2)所示,重叠部分忽略不计),其中 OEMF 是以 O 为圆心、$\angle EOF=120°$的扇形,且$\overset{\frown}{EF}$,$\overset{\frown}{GH}$分别与边 BC,AD 相切于点 M,N.

(1) 当 BE 长为 1 dm 时,求折卷成的包装盒的容积;

(2) 当 BE 的长为多少时,折卷成的包装盒的容积最大?



补偿训练（12）答案

1.解析　依据算法中的程序框图知其作用是统计茎叶图中数学考试成绩不低于 90 分的次数，由茎叶图易知共有 10 次，故输出的结果为 10．答案　10

2.画示意图，在 ΔABC 中用余弦定理得 $\cos B=\frac{4}{5}$，则 $\sin B=\frac{3}{5}$，$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 6\cdot\frac{3}{5}=9$，图中阴影部分的面积为三角形 ABC 的面积减去半径为 1 的半圆的面积即为 $9-\frac{\pi}{2}$，则本题中蚂蚁恰在离三个顶点距离都大于 1 的地方的概率为 $P=\frac{9-\frac{\pi}{2}}{9}=1-\frac{\pi}{18}$．

3.$(0,2)$　4.$2\sqrt{2}$

5.$y_1=(a-1)x-1$，$y_2=x^2-ax-1$ 都过定点 $P(0,-1)$．在 $y_1=(a-1)x-1$ 中，令 $y=0$，得 $M(\frac{1}{a-1}，0)$，且 $a>1$；$y_2=x^2-ax-1$ 也过点 $M(\frac{1}{a-1}，0)$，代入，得 $\left(\frac{1}{a-1}\right)^2-\frac{a}{a-1}-1=0$，解之得 $a=\frac{3}{2}$（$a=0$ 舍去）．

6.$m<-1$

7.（1）因为 $A(-3,4)$，所以 $OA=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$，…………………………………1 分

又因为 $AC=4$，所以 $OC=1$，所以 $C(-\frac{3}{5},\frac{4}{5})$，…………………………………3 分

由 $BD=4$，得 $D(5,0)$，……………………………………………………………… 4 分

所以直线 CD 的斜率 $\frac{0-\frac{4}{5}}{5-\left(-\frac{3}{5}\right)}=-\frac{1}{7}$，　…………………………………………………5 分

所以直线 CD 的方程为 $y=-\frac{1}{7}(x-5)$，即 $x+7y-5=0$．………………………6 分

（2）设 $C(-3m,4m)(0<m\leqslant 1)$，则 $OC=5m$．……………………………………………7 分

则 $AC=OA-OC=5-5m$，

因为 $AC=BD$，所以 $OD=OB-BD=5m+4$，

所以 D 点的坐标为 $(5m+4,0)$ ……………………………………………………………8 分

又设 ΔOCD 的外接圆的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，

则有 $\begin{cases}F=0,\\ 9m^2+16m^2-3mD+4mE+F=0,\\ (5m+4)^2+(5m+4)D+F=0.\end{cases}$ ……………………………………………10 分

解之得 $D=-(5m+4), F=0$, $E=-10m-3$,

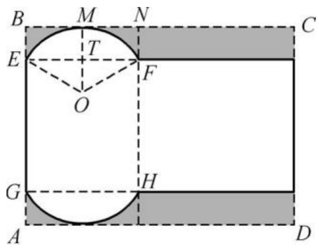
所以 ΔOCD 的外接圆的方程为 $x^2+y^2-(5m+4)x-(10m+3)y=0$ ，…………12 分

整理得 $x^2+y^2-4x-3y-5m(x+2y)=0$，

令 $\begin{cases}x^2+y^2-4x-3y=0,\\ x+2y=0\end{cases}$ ，所以 $\begin{cases}x=0,\\ y=0.\end{cases}$（舍）或 $\begin{cases}x=2,\\ y=-1.\end{cases}$

所以△ OCD 的外接圆恒过定点为 $(2,-1)$. ……………………………………………14 分

8. (1) 如图,连接 MO 交 EF 于点 T.设 $OE=OF=OM=R$,



在 Rt△ OET 中,因为 $\angle EOT=\frac{1}{2}\angle EOF=60°$,所以 $OT=\frac{R}{2}$,则 $MT=OM-OT=\frac{R}{2}$.

从而 $BE=MT=\frac{R}{2}$,即 $R=2BE=2$. (2 分)

故所得柱体的底面积 $S=S_{扇形OEF}-S_{\triangle OEF}=\frac{1}{3}\pi R^2 \frac{1}{2}R^2\sin120°=\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$. (4 分)

又所得柱体的高 $EG=4$,所以 $V=S\times EG=\frac{16\pi}{3}-4\sqrt{3}$.

答:当 BE 长为 1 dm 时,折卷成的包装盒的容积为 $\left(\frac{16\pi}{3}-4\sqrt{3}\right)$dm². (6 分)

(2) 设 $BE=x$,则 $R=2x$,所以所得柱体的底面积 $S=S_{扇形OEF}-S_{\triangle OEF}=\frac{1}{3}\pi R^2 \frac{1}{2}R^2\sin120°=\left(\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}\right)x^2$.又所得柱体的高 $EG=6-2x$,

所以 $V=S\times EG=\left(\frac{8\pi}{3}-2\sqrt{3}\right)(-x^3+3x^2)$,其中 $0<x<3$. (10 分)

令 $f(x)=-x^3+3x^2, x\in(0,3)$,则由 $f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)=0$,解得 $x=2$. (12 分)

列表如下: x	$(0,2)$	2	$(2,3)$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	极大值	↘

所以当 $x=2$ 时,$f(x)$取得最大值.

答:当 BE 的长为 2 dm 时,折卷成的包装盒的容积最大.(14 分)