# 第 4.2 节　概率与统计

## 4.2.1　事件的关系与运算

我们希望从简单事件的概率推算出复杂事件的概率，所以要研究事件之间的关系与运算.

事实上，利用样本空间的子集表示事件，使我们可以利用集合的知识研究随机事件，从而为研究概率的性质和计算等提供有效而简便的方法. 下面我们按照这一思路展开研究.

【知识建构】

**1.** 在掷骰子试验中，观察骰子朝上面的点数，可以定义许多随机事件，例如：

$C_i$= “点数为 i”，$i=1,2,3,4,5,6$;

$D_1$= “点数不大于 3”；$D_2$= “点数大于 3”

$E_1$= “点数为 1 或 2”；$E_2$= “点数为 2 或 3”

$F$= “点数为偶数”；$G$= “点数为奇数”

$A$= “第一次点数小于 3”；$B$= “第二次点数小于 3”

...

① $C_1 \subseteq G$

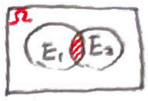
② $D_1 \subseteq E_1、E_2$

③ $C_2 \subseteq E_1, E_2$

④ $C_1 \subseteq C_2$

⑤ $F \subseteq G$

⑥ $A \subseteq B$




请用集合的形式表示这些事件. 借助集合与集合的关系和运算，你能发现这些事件之间的联系吗？

| 事件的关系或运算 | 含义 | 符号表示 | 概率性质 |
|---|---|---|---|
| 包含 | $A$ 发生导致 $B$ 发生 | $A \subseteq B$ | $P(A) \le P(B)$ |
| 并事件 (和事件) | $A$ 与 $B$ 至少一个发生 | $A \cup B$ 或 $A+B$ | $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ |
| 交事件 (积事件) | $A$ 与 $B$ 同时发生 | $A \cap B$ 或 $AB$ | $P(AB)=P(A)P(B\|A)$ |
| 互斥( 互不相容) | $A$ 与 $B$ 不能同时发生 | $A \cap B = \varnothing$ | $P(A+B)=P(A)+P(B)$ |
| 互为对立 | $A$ 与 $B$ 有且仅有一个发生 | $A \cap B = \varnothing, A \cup B = \Omega$ | $P(A)+P(B)=1$ |
| 相互独立 | A 发生与否对 B 发生的概率没有影响 | $P(B\|A)=P(B)$ | $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$ |

**2.** 在 5 道试题中有 3 道代数题和 2 道几何题，每次从中随机抽出 1 道题，抽出的题不再放回.

**(Ⅰ)** 第 1 次抽到代数题且第 2 次抽到几何题的概率；

**(Ⅱ)** 在第 1 次抽到代数题的条件下，第 2 次抽到几何题的概率.

2代2几 选到几

(1) 记第1次抽到代数题为事件A，第2次抽到几何题为事件B.

$P(AB)=P(A)\cdot P(B|A)$

$=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{3}{10}$

$P(AB)=\frac{3\times 2}{5\times 4}=\frac{3}{10}.$

(2) $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$

$=\frac{\frac{3}{10}}{\frac{3}{5}}$

$=\frac{1}{2}$

$P(B|A)=\frac{1}{2}.$

求条件概率有两种方法：

一种是基于样本空间Ω，先计算 $P(A)$ 和 $P(AB)$，再利用条件概率公式求 $P(B|A)$;

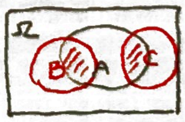
另一种是根据条件概率的直观意义，增加了 “A 发生” 的条件后，样本空间缩小为 A，求 $P(B|A)$ 就是以 A 为样本空间计算 AB 的概率.

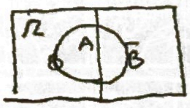
条件概率只是缩小了样本空间，因此条件概率同样具有概率的性质：

设 $P(A)>0$，则 (1) $P(\Omega\,|\,A)=$ <u>　1　</u>.

(2) 如果 $B$ 和 $C$ 是两个互斥事件，则 $P(B \cup C\,|\,A)=$ <u>$P(B|A)+P(C|A)$</u>

(3) 设 $\bar{B}$ 和 $B$ 互为对立事件，则 $P(\bar{B}\,|\,A)=$ <u>$1-P(B|A)$</u>.



**3.** 从有 $a$ 个红球和 $b$ 个蓝球的袋子中，每次随机摸出 1 个球，摸出的球不再放回，显然，第 1 次摸到红球的概率为 $\frac{a}{a+b}$，那么第 2 次摸到红球的概率是多大？如何计算这个概率呢？

解：用 $R_i$ 表示"第 i 次摸到红球"
$B_i$ ………… 蓝球 $(i=1,2)$

$R_2 = R_1R_2 \cup B_1R_2$ （按第1次的可能的摸球结果表示为两个互斥事件的并）

利用概率的加法和乘法公式：

$$P(R_2) = P(R_1R_2 \cup B_1R_2) = P(R_1R_2)+P(B_1R_2)$$
$$= P(R_1)P(R_2|R_1) + P(B_1)P(R_2|B_1)$$
$$= \frac{a}{a+b}\times\frac{a-1}{a+b-1} + \frac{b}{a+b}\times\frac{a}{a+b-1}$$
$$= \frac{a}{a+b}$$

按照某种标准，将一个复杂事件表示为两个互斥事件的和，再由概率的加法公式和乘法公式求得这个复杂事件的概率.

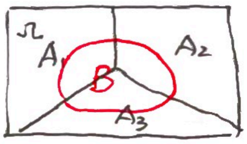
**全概率公式 (total probability formula)**

一般地，设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是一组两两互斥的事件，$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\Omega$，且 $P(A_i)>0$，$i=1,2,\cdots,n$，则对任意的事件 $B\subseteq\Omega$，有 $P(B)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)$

**4.** 有 3 台车床加工同一型号的零件，第 1 台加工的次品率为 6%，第 2,3 台加工的次品率均为 5%，加工出来的零件混放在一起。已知第 1,2,3 台车床加工的零件数分别占总数的 25%,30%,45%

（I）任取一个零件，计算它是次品的概率;

（II）* 如果取到的零件是次品，计算它是第 $i(i=1,2,3)$ 台车床加工的概率.




解：设 $B$ = "任一零件为次品"
$A_i$ = "零件为第 i 台车床加工" $(i=1,2,3)$
$\Omega = A_1\cup A_2\cup A_3$，$A_1, A_2, A_3$ 两两互斥.

(1) 由全概率公式

$$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)$$
$$=0.25\times0.06+0.3\times0.05+0.45\times0.05$$
$$=0.0525$$

(2)
$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)}=\frac{0.25\times0.06}{0.0525}=\frac{2}{7}$$

同理 $P(A_2|B)=\frac{2}{7}$，$P(A_3|B)=\frac{3}{7}$.

**贝叶斯公式 *(Bayes formula)**

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 一组两两互斥的事件，A $A\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\Omega$，且 $P(A_i)>0, i=1,2,\cdots,n$，则对任意的事件 $B\subseteq\Omega$，$P(B)>0$，有 $P(A_i|B)=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)}=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{k=1}^{n}P(A_k)P(B|A_k)}$，$i=1,2,\cdots,n$.

揭示了两个事件概率之间的关系

【巩固练习】

1. (18 全国 III 卷) 若某群体中的成员只用现金支付的概率为 0.45，既用现金支付也用非现金支付的概率为 0.15，则不用现金支付的概率为 ( B )

A. 0.3　　B. 0.4　　C. 0.6　　D. 0.7

2. 掷两枚质地均匀的骰子，设 A=“第一枚出现奇数点”，B=“第二枚出现偶数点”，则 A 与 B 的关系为( C )

A. 互斥　　B. 互为对立　　C. 相互独立　　D. 相等

3. 假设$P(A)=0.7, P(B)=0.8$, 且$A$ 与$B$ 相互独立，则$P(AB)=$ 0.56 ，$P(A\cup B)=$ 0.94 .

$=P(A)+P(B)-P(AB)$
$=0.7+0.8-P(A)\cdot P(B)$
$=0.94$

容斥原理

$1-P(\overline{A\cup B})$
$=1-P(\bar{A}\cap\bar{B})$
$=1-P(\bar{A})P(\bar{B})$
$=1-0.3\times0.2=0.94$

德摩根律

4. 若$P(A)>0, P(B)>0$, 证明: 事件$A, B$ 相互独立与$A, B$ 互斥不能同时成立.

证明. 假设 AB 独立 且互斥

$\because$ A,B互斥 $\therefore P(AB)=0$

又 $\because$ AB独立 $P(AB)=P(A)\cdot P(B)=0$

$P(A)=0$ 或 $P(B)=0$ 与 $P(A)>0, P(B)>0$ 矛盾

$\therefore$ AB 独立与互斥不能同时成立.

5. 已知 3 张奖券中只有 1 张有奖，甲、乙、丙 3 名同学依次不放回地各随机抽取 1 张。他们中奖的概率与抽奖的次序有关吗？

记甲,乙,丙中奖为事件A,B,C

$P(\text{甲中奖})=P(A)=\frac{1}{3}$

$P(\text{乙中奖})=P(\bar{A}B)=P(\bar{A})P(B|\bar{A})=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$

$P(\text{丙中奖})=P(\bar{A}\bar{B}C)=P(\bar{A})P(\bar{B}|\bar{A})P(C|\bar{A}\bar{B})=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{1}=\frac{1}{3}$.

与次序无关.

6、某学校有 A,B 两家餐厅，王同学第 1 天午餐时随机地选择一家餐厅用餐. 如果第 1 天去 A 餐厅，那么第 2 天去 A 餐厅的概率为 0.6; 如果第 1 天去 B 餐厅，那么第 2 天去 A 餐厅的概率为 0.8. 计算王同学第 2 天去 A 餐厅用餐的概率.

解：记第i天去A餐厅为事件$A_i$ $(i=1,2)$，去B餐厅为事件$B_i$，其中$A_1$、$B_1$互斥

$$P(A_2)=P(A_1A_2+B_1A_2)$$
$$=P(A_1A_2)+P(B_1A_2)$$
$$=P(A_1)P(A_2|A_1)+P(B_1)P(A_2|B_1)$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}$$
$$=\frac{7}{10}$$

7、在数字通信中，信号是由数字 0 和 1 组成的序列. 由于随机因素的干扰，发送的信号 0 或 1 有可能被错误地接收为 1 或 0. 已知发送信号 0 时，接收为 0 和 1 的概率分别为 0.9 和 0.1; 发送信号 1 时，接收为 1 和 0 的概率分别为 0.95 和 0.05. 假设发送信号 0 和 1 是等可能的.

(Ⅰ) 分别求接收的信号为 0 和 1 的概率;

(Ⅱ) * 已知接收的信号为 0, 求发送的信号是 1 的概率.

解. 设 A = "发送的信号为0"　$\bar{A}$ = "发送的信号为1"

B = "接收的信号为0"　$\bar{B}$ = "接收的信号为1"

$P(A)=P(\bar{A})=\frac{1}{2}$

$P(B|A)=0.9$　　$P(\bar{B}|A)=0.1$

$P(B|\bar{A})=0.05$　　$P(\bar{B}|\bar{A})=0.95$

(1) $P(B)=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})=0.475$　$\frac{19}{40}$

$P(\bar{B})=1-P(B)=0.525$　$\frac{21}{40}$

(2) $P(\bar{A}|B)=\frac{P(\bar{A}B)}{P(B)}=\frac{P(\bar{A})P(B|\bar{A})}{P(B)}=\frac{1}{19}.$