让学生经历真实的数学研究过程

——“基本不等式”的教学实录与反思

龚亮亮　卓　斌　（南京师范大学附属中学秦淮科技高中　210007）

摘　要:“基本不等式”这节课让学生经历提出数学问题、作出数学猜想、得出数学命题、析出研究经验的研究过程,从而培养学生综合应用数学知识和思想方法进行数学探究的能力.让学生经历数学研究过程有四点建议:设计恰当的问题串,让研究有载体;基于学情的修正完善,让研究有根基;逐步实现命题精致化,让研究有生长;运用现代教育技术,让研究有抓手.

关键词:数学研究过程;基本不等式;实录与反思

探索是任何一门科学的生命线.“一个好的教师让人发现真理,而一个坏的教师奉送真理”.在数学定理、数学公式的教学中,我们要让学生经历“问题—实验—猜想—证明”这样真实的研究过程,从而培养学生综合应用数学知识和数学思想方法进行数学探究的能力.本文以“基本不等式”一课为例,谈一谈让学生经历数学研究的过程与思考.

1　课堂教学实录

1.1　创设现实情境,提出数学问题

师:同学们,屏幕上展示的是什么?

生众:天平.

师:我们都知道天平是用来称量物体质量的,老师现在遇到一个棘手的问题.

(屏幕展示)现有一架天平造得不准确,天平的两臂长略有不同(其他因素不计).将物体放到左右两个盘子中各称一次,放在左盘称得质量为 a,放在右盘称得质量为 b.那么该如何合理地表示物体的质量呢?

生 1:我觉得物体的质量应该约为 $\dfrac{a+b}{2}$.

师:你是怎么思考的?

生 1:物体放在左、右两盘称了两次,两臂长略有不等,所以两次称得的质量应该一次比物体质量略大,一次比物体质量略小.

师:因此你取了两次的平均值.同学们,你们认可吗?还可以从其他角度合理地表示物体的质量吗?

生 2(实物投影):$\begin{cases} al_1=ml_2, \\ ml_1=bl_2, \end{cases}$ $m(l_1+l_2)=al_1+bl_2$,$m=\dfrac{al_1+bl_2}{l_1+l_2}$.

师:请问 l_1,l_2 是怎么来的?

生 2:设天平的左臂长为 l_1,右臂长为 l_2.

师:认真审题,你列的方程组对吗?

生 2:应该是 $\begin{cases} ml_1=al_2, \\ bl_1=ml_2, \end{cases}$

师:如何求解呢?

生 3:将两式相除,得 $\dfrac{m}{b}=\dfrac{a}{m}$,化简得 $m=\sqrt{ab}$.

师:将两式相除的目的是什么?

生 3:因为 l_1,l_2 是求解中引进的辅助量,必须消去.

师:非常好!通过刚才的探索,我们得到了表示物体的质量的两个量:$\dfrac{a+b}{2}$ 与 $\sqrt{ab}$.我们不禁要问:依靠生活常识给出的估计值和准确值相比,到底是大了还是小了呢?

点评　教师通过问题:天平称量物体两次质量不等,怎样合理表示物体的质量?引发学生积极思考,一是依靠生活常识,用“算术平均数”表示,二是借助学习的物理知识进行严格运算,从而得到两个不同的结果.进而追问:“依靠生活常识给出的估计值和准确值相比,是大了还是小了呢?”创设的情境真实而有意义,问题的提出合理而自然.难能可贵的是对生 2 的两处错误,教师处置较为高明:一是引导学生认真审题,不放过细节;二是引导学生明白解题过程中引进的辅助量必须消去,做到设而不求.

1.2　设计数学实验,作出数学猜想

师:如何比较 $\dfrac{a+b}{2}$ 与 $\sqrt{ab}$ 的大小呢?

生 4:代入数字计算.譬如 $a=1$,$b=2$,则

$\frac{3}{2}>\sqrt{2}$.

师:可能相等吗?

生4:当 $a=b$ 时,相等.

师:可能 $\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}$ 吗? 我们可以再通过大量数据来验证一下,借助 Excel 表格来试验.

表1

a	2	53	79	99 999	1 000 000	3.141 592 6	1 000
b	8	89	37	53 024	1 111 111	3.141	1 000
$\sqrt{ab}$	4	68.7	54.1	72 817	1 054 093	3.141 296 29	1 000
$\frac{a+b}{2}$	5	71	58	76 512	1 055 556	3.141 296 3	1 000

师:因此,你的猜想是什么呢?

生4:$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$.

师:数学讲究严谨而理性,仅靠有限的数据检验得到的结论不能作为数学命题.接下来应该怎么办呢?

点评　提出比较"$\frac{a+b}{2}$ 与 $\sqrt{ab}$ 的大小"问题之后,学生想到用特殊值代入较为合理.教师顺势而为的两个追问让学生的思维更加缜密:一是可能相等吗? 二是可能 $\frac{a+b}{2}<\sqrt{ab}$ 吗? 进而借助 Excel 表格进行验证,体现了课堂的动态生成,让猜想"$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$"更有数理依据.

1.3　尝试数学证明,得出数学命题

生众:证明.

师:请同学们尝试一下给出证明.

(停顿20秒,巡视一下有哪些不同的证明思路).

实物投影展示第一位学生的证法:

$\frac{(a+b)^2}{4}-ab=\frac{(a-b)^2}{4}\geqslant 0$.

师:请说说数学依据,怎么想到证明思路的?

生5:先平方,然后作差.

师:什么时候取等号呢?

生6:当 $a=b$ 时取等号.

师:解释一下,什么叫"当 $a=b$ 时取等号?"

生6:也就是说 $a=b$ 时,有 $\sqrt{ab}=\frac{a+b}{2}$.

师:反过来,如果 $\sqrt{ab}=\frac{a+b}{2}$,是否有 $a=b$ 呢?

生6:是的.

师:因此,我们应该说"当且仅当 $a=b$ 时,取等号".

生7:我觉得这个地方需要增加 $\frac{a+b}{2}>0$,$\sqrt{ab}>0$,否则无法由 $\frac{(a+b)^2}{4}\geqslant ab$ 得到 $\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$.

师:两边不平方,直接作差,行吗?

实物投影展示第二位学生的证法:因为 $\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}\geqslant 0$,所以 $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$.

师:这种证明方法称为作差比较法.

实物投影展示第三位学生的证法:$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$,$ab\leqslant\frac{(a+b)^2}{4}$,$4ab\leqslant a^2+2ab+b^2$,$(a-b)^2\geqslant 0$.

师:请这位同学说说你是怎么想的?

生8:我是假设 $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$,然后得到 $(a-b)^2\geqslant 0$,发现这个不等式是成立的.

师:你的思路是自然的,从要证明的结论入手,但是你的说法是错误的,有循环论证之嫌.实际上,你是在寻找使得 $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$ 成立的充分条件,即 $ab\leqslant\frac{(a+b)^2}{4}$.那么由 $ab\leqslant\frac{(a+b)^2}{4}$ 是否可以推导 $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$ 呢?

生8:必须增加条件 $a>0$,$b>0$.

师:那么,有了 $ab\leqslant\frac{(a+b)^2}{4}$,你需要什么充分条件,使得它成立?

生8:把不等式 $ab\leqslant\frac{(a+b)^2}{4}$ 两边同乘以4,移项得 $(a-b)^2\geqslant 0$,这显然成立.

师:这种证明方法我们称为分析法.分析法在书写格式上要求较高,始终在寻找使上一步成立的充分条件.规范书写如下:要证 $ab\leqslant\frac{a+b}{2}$,由

于 $a>0$,$b>0$,只要证 $ab\leqslant\frac{(a+b)^2}{4}$,即 $4ab\leqslant a^2+2ab+b^2$,即证 $(a-b)^2\geqslant0$.因为 $(a-b)^2\geqslant0$ 显然成立,所以 $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$ 得证.

实物投影展示第四位学生的证法:因为 $(a-b)^2\geqslant0$,所以 $a^2-2ab+b^2\geqslant0$,所以 $a^2+b^2+2ab\geqslant4ab$,即 $ab\leqslant\frac{(a+b)^2}{4}$.由于 $a>0$,$b>0$,所以 $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$.

师:非常好!这种证明方法叫做综合法.请同学们思考,综合法与分析法有什么区别与联系?

生 9:综合法就是将分析法的顺序倒过来.分析法是从要证的式子入手,一步一步寻找使得它成立的充分条件.综合法就是把分析法的最后一步作为条件,一步一步推到我们要证的结论.

师:好的,分析法就是执果索因,综合法是由因导果.

我们运用四种数学方法对猜想进行了严格的证明,同学们的猜想是正确的.我们得到以下真命题:如果 a, b 是正数,那么 $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$,当且仅当 $a=b$ 时取等号.

点评 基于学生真实的证明思路,教师悉心呵护学生"原生态"的思维过程,并引导学生修正完善,总结提炼,最终自然地给出了四种不同的证明方法——平方作差法、作差比较法、分析法和综合法.师生之间火热的对话既是数学思维的碰撞,也是数学思想的流淌,犹如一幅美丽的画卷,让人赏心悦目.

1.4 精致数学命题,析出研究经验

师:我们从数的角度进行了证明,能否从形的角度来认识这个不等式呢?(停顿 30 秒)比如我们现在有两条线段,长度分别为 a 和 b,你能够构造出不等式两侧的量吗?

生 10:我觉得对于 $\frac{a+b}{2}$,只要取 $a+b$ 这条线段的中点.

师:你能否找到更多长度为 $\frac{a+b}{2}$ 的线段?

生 11:如图 1,设 $AC=a$,$CB=b$,O 为 AB 的中点,以 O 为圆心、OA 为半径画圆,那么点 O 到圆上所有点的距离都是 $\frac{a+b}{2}$.

师:谁能够构造出 $\sqrt{ab}$ 呢?

生 12:再过点 C 作 AB 的垂线,交圆 O 于点 D,E,那么 DC 的长度就是 $\sqrt{ab}$.

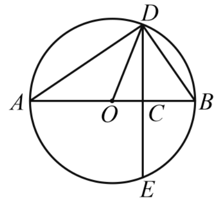

图 1

师:理由呢?

生 12:因为 $\triangle ACD\backsim\triangle DCB$,所以 $\frac{AC}{CD}=\frac{DC}{CB}$,因此 $CD^2=ab$,所以 $CD=\sqrt{ab}$.

师:非常好!我们找到了长度分别为 $\sqrt{ab}$ 和 $\frac{a+b}{2}$ 的线段.那么怎么解释 $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$ 这个不等式呢?

生 12:连结 OD,在 $\triangle OCD$ 中,斜边 OD 大于直角边 CD.当点 C 与点 O 重合时,$\sqrt{ab}=\frac{a+b}{2}$.

师:那么这个不等式的几何意义用文字语言如何叙述呢?

生 13:半弦不大于半径.

师:我们从数和形两个角度认识了这个不等式.如果我们把 $\frac{a+b}{2}$,$\sqrt{ab}$ 分别称为正数 a 和 b 的算术平均数与几何平均数,那么这个不等式如何用文字语言来叙述呢?

生 14:两个正数的几何平均数不大于它的算术平均数.

师:a,b 一定要是正数吗?

生 15:a,b 都为零,或者 a,b 中有一个为零,不等式也成立.

师:这就是我们今天要学习的基本不等式(板书课题).

同学们,这个不等式之所以称为基本不等式,是因为它有着明确的数学意义,而且应用非常广泛.不等式中的 a,b 只能表示数字吗?表示代数式行不行?

生 16:可以是代数式,但是必须大于或等于零.

师:你能不能举个例子?

生 16:a 为 m^2,b 为 n^2,这样就有 $\frac{m^2+n^2}{2}\geqslant|mn|$.

师:很好!基本不等式还有很多变式,我们下节课会继续研究.总结一下本节课,你有什么收获?

生 17:我们学习了基本不等式及基本不等式的四种证明方法,并从数和形两个角度认识了基本不等式.

师:非常好！调整一下顺序,就是“一二四四,”即:一个不等式、两个认识角度、四种证明方法和数学研究的四个步骤.

师:布置两道课后思考题:1)基本不等式能否推广到$n(n>1,n\in\mathbf{N}^*)$个非负数的情形?2)赵爽弦图和2002年国际数学家大会会标能否用今天学习的基本不等式给出解释?

点评　得到了命题“如果a,b是正数,那么$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$,当且仅当$a=b$时取等号”后,能否一下子就看透问题的本质呢?教师精心引导学生构造不等式两端的量,理解不等式的几何意义.而后又把a,b的范围进行了扩充,从而揭开了基本不等式的神秘面纱,实现了符号语言、图形语言、文字语言的完美诠释.让人惊喜的是小结收获阶段学生给出了“一个不等式、两个认识角度、四种证明方法”的提炼总结,教师则揭示了研究一个新的数学对象的四个步骤:问题—实验—猜想—证明,总结了真实的数学研究过程.对两道课后思考题的设计也是独具匠心,让学生带着问题离开课堂,给人以“余音绕梁、三日不绝”的韵味.

2　教学后的反思

如何让学生经历一个真实的数学研究过程一直是我们探索的课题,“基本不等式”这节课的教学是一个很好的尝试.

2.1　设计恰当的问题串,让研究有载体

在对一节课进行教学设计时,我们的首要任务就是要把握好这节课的教学重难点与核心知识,并以此作为问题串设计的出发点与着力点.譬如,本节课的教学重点应该是基本不等式的探索与证明过程,教学难点应该是基本不等式的“几何解释”,基于此,教师设计了问题串:1)$\frac{a+b}{2}$与$\sqrt{ab}$谁大谁小?2)请尝试证明$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$;3)能否从形的角度来认识$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$?

2.2　基于学情的修正完善,让研究有根基

奥苏贝尔有句名言:“影响学习的唯一最重要因素就是学习者已经知道了什么.要探明这一点,并应据此进行教学.”由此可见,探明学习者“已经知道了什么”,即探明学情应该是有效教学的前提.本节课无论是求解物体的质量为$\sqrt{ab}$,还是$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$的四种方法的证明,教师都是基于学生的求解或者证明思路展开教学,一切源于学生已有的思路,一切在于帮助学生走向完善.本节课有17位学生参与讨论、板演与展示,有效参与率达34%,实现了让数学研究牢牢地扎根于学情.

2.3　逐步实现命题精致化,让研究有生长

基本不等式的得到要经历三个过程:一是$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}(a>0,b>0)$;二是$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}(a>0,b>0$,当且仅当$a=b$时取等号);三是$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}(a\geqslant0,b\geqslant0$,当且仅当$a=b$时取等号).另外,还要实现对符号语言、图形语言、文字语言等三种数学语言的解读,这是一个数学命题的精加工的过程,一定要引导学生对命题逐步精致化、不断地建构完善,让学生经历命题“生长”的过程,实施“慢教育”.

2.4　运用现代教育技术,让研究有抓手

通过科技手段拓展学生数学学习的方式,让学生多维度理解数学,多途径做中学,让数学学习更有趣、更有理、更有情、更好玩.本节课借助实物展台展示学生的探索过程、证明思路,并呈现纠错过程;还借助Excel进行大数据处理,初步归纳出$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$;并使用几何画板,探索$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$的几何解释,均给人留下深刻印象.我们认为,让学生经历真实的数学研究过程,就是转变学生的学习方式,让学生真正“慧学”数学的重要路径.