

2020-2021 学年度第一学期期中检测试题

高三数学

2020. 11

(全卷满分 150 分, 考试时间 120 分钟)

一、单项选择题(本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项符合要求).

1. 已知复数 z 满足 $(1-i)z=2$, i 为虚数单位, 则 z 等于 ()

- A. $1-i$ B. $1+i$ C. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$ D. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

2. 已知集合 $A=\{x | (x+1)(x-2) \leq 0\}$, $B=\{x | \sqrt{x} \leq 2\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $[-1, 0]$ B. $[0, 1]$ C. $(0, 2]$ D. $[0, 2]$

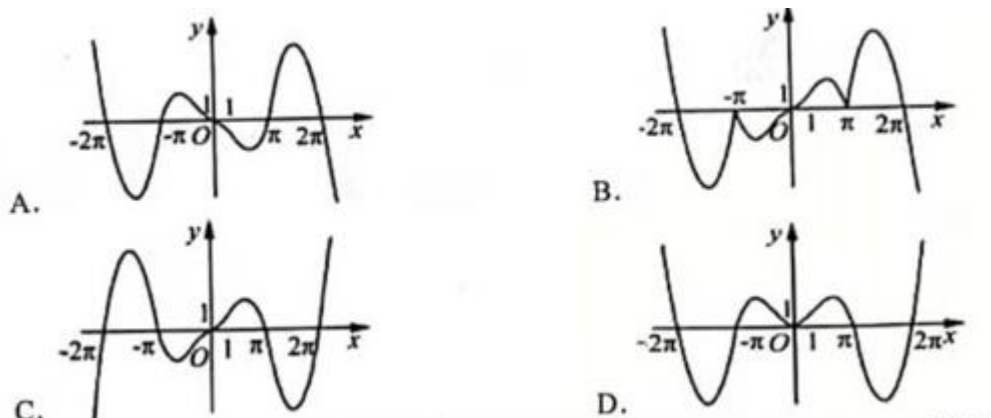
3. 已知 $a=\log_{1.1} 0.9$, $b=0.9^{1.1}$, $c=1.1^{0.9}$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()

- A. $a < b < c$ B. $a < c < b$ C. $b < a < c$ D. $b < c < a$

4. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x-5, & x \geq 6 \\ f(x+2)+1, & x < 6 \end{cases}$ 则 $f(5)$ 的值为 ()

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

5. 函数 $f(x) = \cos(x - \frac{\pi}{2}) \ln(e^x + e^{-x})$ 的图象大致为 ()



6. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 根据下列条件解三角形, 其中有两个解的有

- A. $a=8, b=10, A=45^\circ$ B. $a=60, b=81, B=60^\circ$

C. $a=7, b=5, A=80^\circ$

D. $a=14, b=20, A=45^\circ$

7. 我国古代数学家刘徽在《九章算术注》中提出了割圆术：“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆合，而无所失矣”。这可视为中国古代极限思想的佳作。割圆术可以视为将一个圆内接正 n 边形等分成 n 个等腰三角形（如图所示），当 n 变得很大时，等腰三角形的面积之和近似等于圆的面积。运用割圆术的思想，可得到 $\sin 2^\circ$ 的近似值为（ ）



A. 0.035

B. 0.026

C. 0.018

D. 0.033

8. 已知一个球的半径为 3，则该球内接正六棱锥的体积的最大值为（ ）

A. $10\sqrt{3}$

B. $\frac{27\sqrt{3}}{2}$

C. $16\sqrt{3}$

D. $\frac{35\sqrt{3}}{2}$

二、多项选择题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 3 分）

9. 下列命题中正确的是（ ）

A. 命题“ $\forall x \in \mathbb{R}, \sin x \leq 1$ ”的否定是“ $\exists x \in \mathbb{R}, \sin x > 1$ ”

B. “ $a > 1$ ”是“ $\frac{1}{a} < 1$ ”的充分不必要条件

C. 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，若 $a^2 + b^2 > c^2$ ，则 $\triangle ABC$ 为锐角三角形

D. 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，若 $\sin 2A = \sin 2B$ ，则 $A = B$

10. 若函数 $f(x) = \sin 2x$ 的图象向右平移 π 个单位得到的图象对应的函数为 $g(x)$ ，则下列说法中正确的是（ ）

A. $g(x)$ 的图象关于 $x = \frac{5\pi}{12}$ 对称

B. 当 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 时， $g(x)$ 的值域为 $[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$

C. $g(x)$ 在区间 $(\frac{5}{12}\pi, \frac{11}{12}\pi)$ 上单调递减

D. 当 $x \in [0, \pi]$ 时，方程 $g(x) = 0$ 有 3 个根.

11. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$ ， $f(x+1)$ 为奇函数，且 $f(2+x) = f(2-x)$ ，则（ ）

A. $f(1) = 0$

B. $f(x) = f(x+4)$

C. $f(x+1) = -f(-x-1)$

D. $y = f(x)$ 在区间 $[0, 50]$ 上至少有 25 个零点

12. 已知正数 x, y, z 满足 $3^x = 4^y = 6^z$, 则下列说法中正确的是 ()

A. $\frac{1}{x} + \frac{1}{2y} = \frac{1}{z}$

B. $3x > 4y > 6z$

C. $x + y > (\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{2})z$

D. $x + y > 2z^2$

三、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. 已知幂函数 $y = f(x)$ 的图象过点 $(2, \frac{1}{4})$, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线方程为 _____

14. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$, $AB = 2$, $AC = 3$, $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{DC}$, 则 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} =$ _____

15. 黄金比例, 用希腊字母 ϕ 表示, 借用古希腊数学家欧几里德的话: 当整条线段的长度与线段中较长段的长度等于较长段与较短段的长度时, 就是根据黄金比例来分割一线段. 从下图我们可以更直观地感受黄金比例: 用 A, B 分别表示较长段与较短段的线段长度, 于是将欧几里德的描述用代数方法表示出来: $\Phi = \frac{A}{B} = \frac{A+B}{A}$, 从而可以解出 ϕ 的值. 类似地, 可以定义其他金属比例. 假设把线段分成 $n+1$ 段, 其中有 n 段长度相等, 记这 n 段的每一段长为 A , 而剩下的一段长为 B (长度较短的). 如果 A 与 B 之比等于整条线段的长与 A 之比, 我们用 λ_n 来表示这个比例, 即 $\lambda_n = \frac{A}{B}$ 对于 $n (n \in \mathbb{N}^+)$ 的每个值对应一个 λ_n , 则称 λ_n 为金属比例. 当 $n=1$ 时, 即为黄金比例, 此时 $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$; 当 $n=2$ 时, 即为白银比例, 我们用希腊字母 σ 表示该比例, 则 $\Phi =$ _____

16. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x, & x \leq 0 \\ 4 - x, & x > 0 \end{cases}$, 其中 $a > 0$, 若函数 $g(x) = f(x) - a$ 引引有两个零点, 则

实数 a 的取值范围是 _____

四、解答题 (本大题共 6 小题, 计 70 分, 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (本小题满分 10 分)

在 ① $a = \sqrt{2}$, ② $S = \frac{c}{2} \cos B$, ③ $C = \frac{\pi}{3}$ 这三个条件中任选一个, 补充在下面问题中, 并对其进行求解.

问题: 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 面积为 S ,

$\sqrt{3}bc \cos A = a \cos C + c \cos A$, $b = 1$, _____, 求 c 的值.

注: 如果选择多个条件分别解答, 按第一个解答计分.

18. (本小题满分12分)

已知函数 $f(x) = \sqrt{3}\cos^2 x + \sin(x + \frac{\pi}{3})\sin(x - \frac{\pi}{6}) - \frac{\sqrt{3}}{2}$

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期及对称中心;

(2) 若 $f(\alpha) = \frac{1}{6}$, 且 $\alpha \in (\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3})$, 求 $\cos 2\alpha$ 的值.

19. (本小题满分12分)

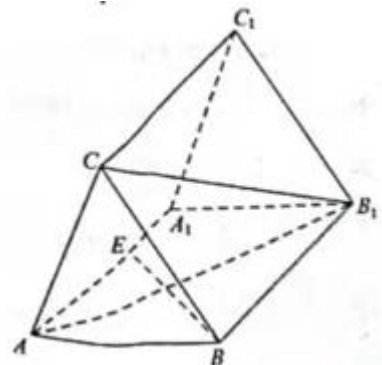
已知函数 $f(x) = a^{x+k} - a^{-x}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数.

(1) 求实数 k 的值;

(2) 若 $f(1) < 0$, 且不等式 $f(3tx+4) + f(-2x^2+1) \leq 0$ 对任意 $t \in [-1, 1]$ 成立, 求实数 x 的取值范围.

20. (本小题满分12分)

如图, 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 四边形 ABB_1A_1 和 AA_1CC_1 均为菱形, 平面 $ABB_1A_1 \perp$ 平面 AA_1CC_1 . $\angle A_1AC = \frac{\pi}{3}$, $\angle A_1AB = \frac{\pi}{4}$, E 为棱 AA_1 上一点, $BE \perp AA_1$.



(1) 求证: $BE \perp A_1C$

(2) 设 $AB=2$, 求二面角 $B-CC_1-A$ 的余弦值.

21. (本小题满分12分)

某校从高二年级随机抽取了20名学生的数学总评成绩和物理总评成绩, 记第 i 位学生的成绩为 (x_i, y_i) ($i=1, 2, 3, \dots, 20$), 其中 x_i, y_i 分别为第 i 位学生的数学总评成绩和物理总评成绩.

抽取的数据列表如下(按数学成绩降序整理):

序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
数学总评成绩 x	95	92	91	90	89	88	88	87	86	85
物理总评成绩 y	96	90	89	87	92	81	86	88	83	84
序号	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
数学总评成绩 x	83	82	81	80	80	79	78	77	75	74
物理总评成绩	81	80	82	85	80	78	79	81	80	78

(1) 根据统计学知识, 当相关系数 $|r| \geq 0.8$ 时, 可视为两个变量之间高度相关. 根据抽取的数据, 能否说明数学总评成绩与物理总评成绩高度相关? 请通过计算加以说明.

参考数据: $\sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 485$, $\sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})^2 = 678$, $\sum_{i=1}^{20} (y_i - \bar{y})^2 = 476$

参考公式: 相关系数 $r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$.

(2) 规定: 总评成绩大于等于 85 分者为优秀, 小于 85 分者为不优秀, 对优秀赋分 1, 对不优秀赋分 0. 从这 20 名学生中随机抽取 2 名学生, 若用 X 表示这 2 名学生两科赋分的和, 求 X 的分布列和数学期望.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = e^x - mx - 2$, $g(x) = e^x - \sin x - x \cos x - 1$.

(1) 当 $x \geq \frac{\pi}{2}$ 时, 若不等式 $f(x) > 0$ 恒成立, 求正整数 m 的值:

(2) 当 $x \geq 0$ 时, 判断函数 $g(x)$ 的零点个数, 并证明你的结论.

参考数据: $e^{\frac{\pi}{2}} \approx 4.8$

高三数学参考答案

1. B 2. D 3. A 4. B 5. C 6. A 7. A 8. C

9. AB 10. AC 11. ABD 12. ACD

13. $2x+y-3=0$ 14. $\frac{11}{3}$ 15. $\sqrt{2}+1$ 16. $(0,1) \cup [7, +\infty)$

17. 在 $\triangle ABC$ 中, 因为 $\sqrt{3}b \cos A = a \cos C + c \cos A$,

所以根据正弦定理得 $\sqrt{3} \sin B \cos A = \sin A \cos C + \sin C \cos A$ 2分

所以 $\sqrt{3} \sin B \cos A = \sin B$, 因为 $\sin B \neq 0$, 所以 $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 5分

选择①, 由余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ 得 $c^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}c - 1 = 0$, 解得 $c = \sqrt{3}$ 10分

选择②, $S = \frac{c}{2} \cos B = \frac{1}{2} bc \sin A$, 所以 $\cos B = \sin A = \cos(\frac{\pi}{2} - A)$

所以 $B = \frac{\pi}{2} - A$, 即 $C = \frac{\pi}{2}$, 解得 $c = \sqrt{3}$ 10分

选择③, $C = \frac{\pi}{3}$, 因为 $\sin B = \sin(A + \frac{\pi}{3}) = \sin A \cos \frac{\pi}{3} + \cos A \sin \frac{\pi}{3} = \frac{3 + \sqrt{6}}{6}$,

所以由 $\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}$ 得 $c = \frac{b \sin C}{\sin B} = 2\sqrt{6} - 4$ 10分

18. (1) $f(x) = \sqrt{3} \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} + \sin(\frac{\pi}{2} + x - \frac{\pi}{6}) \sin(x - \frac{\pi}{6}) - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \times 2 \cos(x - \frac{\pi}{6}) \sin(x - \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \sin(2x - \frac{\pi}{3})$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} (\sin 2x \cdot \frac{1}{2} - \cos 2x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{1}{2} (\sin 2x \cdot \frac{1}{2} + \cos 2x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$= \frac{1}{2} \sin(2x + \frac{\pi}{3}).$$
4分

所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$5分

由 $2x + \frac{\pi}{3} = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 得 $x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$, 所以 $f(x)$ 的对称中心为 $(\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6}, 0), k \in \mathbb{Z}$6分

(2) 由 $f(\alpha) = \frac{1}{6}$ 得 $\sin(2\alpha + \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{3}$, 因为 $\alpha \in (\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3})$, 所以 $2\alpha + \frac{\pi}{3} \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$,

所以 $\cos(2\alpha + \frac{\pi}{3}) = -\sqrt{1 - \sin^2(2\alpha + \frac{\pi}{3})} = -\sqrt{1 - (\frac{1}{3})^2} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$,8分

所以 $\cos 2\alpha = \cos[(2\alpha + \frac{\pi}{3}) - \frac{\pi}{3}] = \cos(2\alpha + \frac{\pi}{3}) \cdot \cos \frac{\pi}{3} + \sin(2\alpha + \frac{\pi}{3}) \cdot \sin \frac{\pi}{3}$

$$= -\frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3} - 2\sqrt{2}}{6}.$$
12分

19. (1) **方法 1**: 因为 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的奇函数, 所以 $f(0) = a^k - 1 = 0$, 解得 $k = 0$ 3 分

下面检验, 此时 $f(x) = a^x - a^{-x}$, 故 $f(-x) = a^{-x} - a^x = -f(x)$, 所以 $f(x)$ 为奇函数5 分

方法 2: 因为 $f(x)$ 为奇函数, 所以 $f(-x) = -f(x)$, 即 $a^{-x+k} - a^x = a^{-x} - a^{x+k}$,1 分

即 $(a^x + a^{-x})(a^k - 1) = 0$,3 分

所以 $a^k - 1 = 0$, 解得 $k = 0$ 5 分

(2) 由 $f(1) < 0$ 得 $a - \frac{1}{a} < 0$, 解得 $0 < a < 1$,6 分

所以 $f(x) = a^x - a^{-x}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的减函数,7 分

因为 $f(x)$ 为奇函数, 所以由 $f(3tx+4) + f(-2x^2+1) \leq 0$ 得 $f(3tx+4) \leq -f(-2x^2+1) = f(2x^2-1)$

因为 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的减函数, 所以 $3tx+4 \geq 2x^2-1$ 对任意 $t \in [-1, 1]$ 成立9 分

令 $g(t) = 3tx+4-2x^2+1 = 3tx+5-2x^2$, 则 $g(t) \geq 0$ 对任意 $t \in [-1, 1]$ 成立,

等价于 $\begin{cases} g(1) = 3x+5-2x^2 \geq 0 \\ g(-1) = -3x+5-2x^2 \geq 0 \end{cases}$,10 分

解得 $-1 \leq x \leq 1$, 所以 x 的取值范围是

$[-1, 1]$12 分

20. (1) 因为平面 $ABB_1A_1 \perp$ 平面 AA_1C_1C , $BE \perp AA_1$,

$BE \subset$ 平面 ABB_1A_1 , 平面 $ABB_1A_1 \cap$ 平面 $AA_1C_1C = AA_1$,

所以 $BE \perp$ 平面 AA_1C_1C ,4 分

又因为 $C_1A_1 \subset$ 平面 AA_1C_1C , 所以 $BE \perp C_1A_1$5 分

(2) **方法 1**: (**综合法**) 作 $EF \perp CC_1$ 于 F , 因为 $BE \perp CC_1$, $BE \cap EF = E$, $BE \subset$ 平面 BEF ,

$EF \subset$ 平面 BEF , 所以 $CC_1 \perp$ 平面 BEF , 因为 $BF \subset$ 平面 BEF , 所以 $BF \perp CC_1$,

所以 $\angle BFE$ 即为二面角 $B-CC_1-A$ 的平面角.9 分

(注: 对于作出了平面角, 但没有证明的给 2 分)

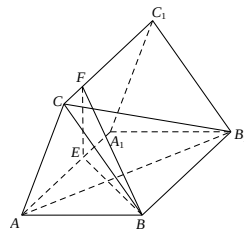
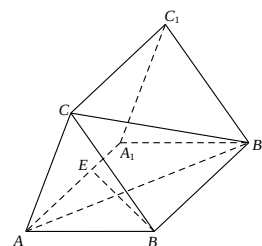
在菱形 ABB_1A_1 中, 由 $AB = 2$ 、 $\angle BAA_1 = \frac{\pi}{4}$, 可求得 $BE = \sqrt{2}$.

在菱形 AA_1C_1C 中, 由 $AB = 2$ 、 $\angle A_1AC = \frac{\pi}{3}$, 可求得 $EF = \sqrt{3}$ 10 分

所以在 $\text{Rt}\triangle BEF$ 中, $EF = \sqrt{3}$, $BF = \sqrt{5}$, 故可求得 $\cos \angle BFE = \frac{\sqrt{15}}{5}$.

所以二面角 $B-CC_1-A$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$12 分

方法 2: (**向量法**) 作 $EF \perp CC_1$ 于 F , 则 $EF \perp AA_1$, 因为平面 $AA_1C_1C \perp$ 平面 ABB_1A_1 ,



$EF \subset \text{平面 } AA_1C_1C$, 平面 $ABB_1A_1 \cap \text{平面 } AA_1C_1C = AA_1$, 所以 $EF \perp \text{平面 } ABB_1A_1$,

以 E 为坐标原点 , EA, EB, EF 所在直线分别为 x, y, z 轴 , 建立如图所示空间直角坐标系 ...6 分

在菱形 ABB_1A_1 中 , 由 $AB = 2$ 、 $\angle BAA_1 = \frac{\pi}{4}$, 可求得 $AE = BE = \sqrt{2}$.

在菱形 AA_1C_1C 中 , 由 $AB = 2$ 、 $\angle A_1AC = \frac{\pi}{3}$, 可求得 $EF = \sqrt{3}$, $CF = \sqrt{2} - 1$,

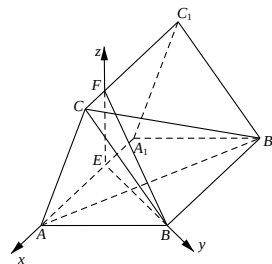
所以点 B 的坐标为 $(0, \sqrt{2}, 0)$, 点 B_1 的坐标为 $(-2, \sqrt{2}, 0)$, 点 C 的坐标为 $(\sqrt{2}-1, 0, \sqrt{3})$, .

由(1)知 $BE \perp \text{平面 } AA_1C_1C$, 所以平面 AC_1C 的一个法向量

$$\vec{n}_1 = (0, 1, 0) , \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

设平面 BC_1C 的法向量 $\vec{n}_2 = (x, y, z)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \vec{n}_2 \cdot \vec{BB}_1 = 0 \\ \vec{n}_2 \cdot \vec{BC} = 0 \end{cases} , \text{ 即 } \begin{cases} -2x = 0 \\ -\sqrt{2}y + \sqrt{3}z = 0 \end{cases} , \text{ 取 } x = 0, y = \sqrt{3}, z = \sqrt{2} ,$$



则平面 BC_1C 的一个法向量 $\vec{n}_2 = (0, \sqrt{3}, \sqrt{2})$ 10 分

$$\text{所以 } \cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5} ,$$

.....11 分

所以二面角 $B-CC_1-A$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$ 12 分

$$21. (1) r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{485}{\sqrt{678 \times 476}} \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$> \frac{485}{\sqrt{680 \times 480}} = \frac{485}{80\sqrt{51}} > \frac{480}{80\sqrt{51}} = \frac{6}{\sqrt{51}} > \frac{6}{7.5} = 6 \times \frac{2}{15} = \frac{4}{5} , \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

所以“数学学期综合成绩”与“物理学期综合成绩”高度相关.6 分

注：这里处理方案很多，例如：

$$r = \frac{485}{\sqrt{678 \times 476}} = \sqrt{\frac{485 \times 485}{678 \times 476}} = \sqrt{\frac{235225}{322728}} \approx \sqrt{0.729} > \sqrt{0.64} = \frac{4}{5} ;$$

$$r = \frac{485}{\sqrt{678 \times 476}} = \sqrt{\frac{485 \times 485}{678 \times 476}} > \sqrt{\frac{485}{678}} > \sqrt{0.7} > \frac{4}{5} ;$$

$$r = \frac{485}{\sqrt{678 \times 476}} > \frac{480}{\sqrt{680 \times 480}} = \sqrt{\frac{480}{680}} = \sqrt{\frac{12}{17}} > \sqrt{0.7} > \frac{4}{5} ;$$

$$r = \frac{485}{\sqrt{678 \times 476}} > \sqrt{\frac{485 \times 485}{680 \times 480}} = \sqrt{\frac{97 \times 97}{136 \times 96}} \approx \sqrt{0.72} > \frac{4}{5} .$$

(2) 由题意得： X 的可能取值为 0, 1, 2, 3, 4.

根据赋分规则可知，7 个人赋分为 2，4 个人赋分为 1，9 个人赋分为 0.

$$\text{所以 } P(X=0) = \frac{C_9^2}{C_{20}^2} = \frac{36}{190}, \quad P(X=1) = \frac{C_4^1 C_9^1}{C_{20}^2} = \frac{36}{190},$$

$$P(X=2) = \frac{C_4^2 + C_7^1 C_9^1}{C_{20}^2} = \frac{69}{190}, \quad P(X=3) = \frac{C_7^1 C_4^1}{C_{20}^2} = \frac{28}{190}, \quad P(X=4) = \frac{C_7^2}{C_{20}^2} = \frac{21}{190}.$$

所以 X 的分布列为:

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{36}{190}$	$\frac{36}{190}$	$\frac{69}{190}$	$\frac{28}{190}$	$\frac{21}{190}$

$$\text{所以 } E(X) = 0 \times \frac{36}{190} + 1 \times \frac{36}{190} + 2 \times \frac{69}{190} + 3 \times \frac{28}{190} + 4 \times \frac{21}{190} = \frac{342}{190} = \frac{9}{5} \quad \text{.....12 分}$$

22. (1) **方法 1**: 分离参数得 当 $x \geq \frac{\pi}{2}$ 时, 不等式 $m < \frac{e^x - 2}{x}$ 恒成立,

$$\text{令 } h(x) = \frac{e^x - 2}{x}, \text{ 则 } h'(x) = \frac{e^x x - (e^x - 2)}{x^2} = \frac{e^x(x-1) + 2}{x^2} > 0, \quad \text{.....2 分}$$

$$\text{所以 } h(x) \text{ 在 } [\frac{\pi}{2}, +\infty) \text{ 上递增, 所以 } h(x)_{\min} = h(\frac{\pi}{2}) = \frac{e^{\frac{\pi}{2}} - 2}{\frac{\pi}{2}} \approx \frac{28}{5\pi}, \quad \text{.....3 分}$$

$$\text{因为 } 1 < \frac{28}{5\pi} < 2, \text{ 所以正整数 } m \text{ 的值为 } 1. \quad \text{.....4 分}$$

方法 2: $f'(x) = e^x - m$.

① 当 $m \leq e^{\frac{\pi}{2}}$ 时, $f'(x) \geq 0$, 所以 $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{2}, +\infty)$ 上递增, 所以 $f(x)_{\min} = f(\frac{\pi}{2}) = e^{\frac{\pi}{2}} - m \cdot \frac{\pi}{2} - 2 > 0$,

$$\text{即 } m < \frac{e^{\frac{\pi}{2}} - 2}{\frac{\pi}{2}} \approx \frac{28}{5\pi}, \text{ 又 } 1 < \frac{28}{5\pi} < 2, \text{ 所以正整数 } m \text{ 的值为 } 1. \quad \text{.....2 分}$$

② 当 $m > e^{\frac{\pi}{2}}$ 时, 令 $f'(x) = e^x - m = 0$, 则 $x = \ln m$.

当 $x \in (\frac{\pi}{2}, \ln m)$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2}, \ln m)$ 上递减;

当 $x \in (\ln m, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(\ln m, +\infty)$ 上递增.

所以 $f(x)_{\min} = f(\ln m) = m - m \ln m - 2 = m(1 - \ln m) - 2 < 0$, 这与 $f(x) \geq 0$ 恒成立矛盾, 故不符合.

综上得: 正整数 m 的值为 1.4 分

(2) 当 $x \geq 0$ 时, 函数 $g(x)$ 有 2 个零点.5 分

证明如下: 显然 $g(0) = 0$, 所以 0 是 $g(x)$ 的一个零点,6 分

① 当 $x > \frac{\pi}{2}$ 时, $g(x) = e^x - \sin x - x \cos x - 1 > e^x - x - 2 > 0$, 所以 $g(x)$ 无零点;7 分

② 当 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 时, $g'(x) = e^x - 2 \cos x + x \sin x$, 令 $h(x) = g'(x) = e^x - 2 \cos x + x \sin x$,

则 $h'(x) = g''(x) = e^x + 3\sin x + x\cos x > 0$, 所以 $g'(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上递增

又 $g'(0) = -1 < 0$, $g'(\frac{\pi}{2}) = e^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{2} > 0$, 所以存在唯一 $x_1 \in (0, \frac{\pi}{2})$ 使得 $g'(x_1) = 0$9 分

所以当 $x \in (0, x_1)$ 时, $g'(x) < 0$, 故 $g(x)$ 递减; 当 $x \in (x_1, \frac{\pi}{2})$ 时, $g'(x) > 0$, 故 $g(x)$ 递增;

因为 $g(0) = 0$, 所以 $g(x_1) < 0$, 又 $g(\frac{\pi}{2}) = e^{\frac{\pi}{2}} - 2 > 0$,

所以存在唯一 $x_2 \in (x_1, \frac{\pi}{2})$ 使得 $g(x_2) = 0$

综上得: 当 $x \geq 0$ 时, 函数 $g(x)$ 有 2 个零点.12 分