江苏省仪征中学2020届高三上学期数学周末自助餐（理3）

班级__________ 学号__________姓名__________成绩__________

一、填空题：

1.设集合 $A=\{x||x-2|\leqslant 2\},B=\{y|y=-x^2,-1\leqslant x\leqslant 2\}$,则 $A\cap B=$ ___________.

2. 函数 $f(x)=(m^2-m-1)x^{m^2-2m-3}$ 是幂函数，且在 $x\in(0,+\infty)$上是减函数，则实数 m 的值为______.

3. 已知 $f(x)$是定义在 **R** 上的偶函数，且 $f(x+2)=-f(x)$，当 $2\leq x\leq 3$ 时，$f(x)=x$，则 $f(105.5)=$________.

4.已知 x,y,z 都是大于 1 的正数，$m>0$，且 $\log_x m=24$，$\log_y m=40$，$\log_{xyz} m=12$，则 $\log_z m$ 的值为_______.

5.已知 $\dfrac{\tan\alpha}{\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}=-\dfrac{2}{3}$,则 $\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$ 的值是_________.

6.过点 $M(1,2)$ 的直线 l 与圆 C：$(x-3)^2+(y-1)^2=9$ 相交于 A，B 两点，若弦 AB 的长为 $2\sqrt{5}$，则直线 l 的方程为________________.

7. 已知 $a>0,b>0,a+b=1$，则 $(a+\dfrac{1}{a})(b+\dfrac{1}{b})$ 的最小值为_________.

8. 在△ABC 中，点 D 在线段 BC 的延长线上，且$\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{CD}$，点 O 在线段 CD 上(与点 C，D 不重合)，若$\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+(1-x)\overrightarrow{AC}$，则 x 的取值范围是______________.

9.在 ΔABC 中，a,b,c 分别为角 A,B,C 所对边的长，S 为 ΔABC 的面积·若不等式 $kS\leqslant 3b^2+3c^2-a^2$ 恒成立,则实数 k 的最大值为______.

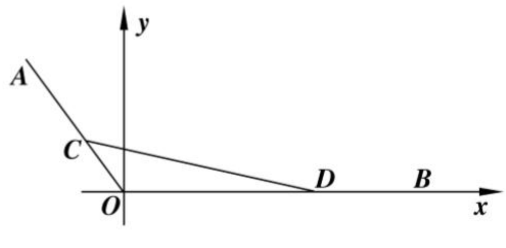
10.已知定义在 R 上的偶函数 $f(x)$，其导函数为 $f'(x)$．当 $x\geqslant 0$ 时，不等式 $xf'(x)+f(x)>1$．若对 $\forall x\in R$，不等式 $e^x f(e^x)-axf(ax)>e^x-ax$ 恒成立，则正整数 a 的最大值是_____________.

二、解答题：

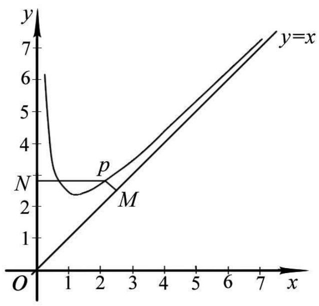
11.在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $A(-3,4),B(9,0)$，C，D 分别为线段 OA，OB 上的动点，且满足 $AC=BD$.

（1）若 $AC=4$，求直线 CD 的方程;

（2）证明：ΔOCD 的外接圆恒过定点(异于原点 O).



12.设函数 $f(x)=x+\dfrac{a}{x}(a\in R)$ 定义域为 $\left(0,+\infty\right)$，且 $f(2)=\dfrac{5}{2}$．设点 P 是函数图像上的任意一点，过点 P 分别作直线 $y=x$ 和 y 轴的垂线，垂足分别为 M,N．



（1）写出 $f(x)$ 的单调递减区间（不必证明）；

（2）设点 P 的横坐标 x_0，求 M 点的坐标（用 x_0 的代数式表示）；

（3）设 O 为坐标原点，求四边形 $OMPN$ 面积的最小值.

参考答案：

1.解析：$\because$ 集合 $A=\{x||x-2|\leqslant 2\}=\{x|0\leqslant x\leqslant 4\}$，$B=\{y|y=-x^2,-1\leqslant x\leqslant 2\}=\{x|-4\leqslant x\leqslant 0\}$，$\therefore A\cap B=\{0\}$.

2.解析：由题意知 $m^2-m-1=1$，解得 $m=2$ 或 $m=-1$；当 $m=2$ 时，$m^2-2m-3=-3$，$f(x)=x^{-3}$ 符合题意，当 $m=-1$ 时，$m^2-2m-3=0$，$f(x)=x^0$ 不合题意．综上知 $m=2$.

3. 解析：由 $f(x+2)=-f(x)$，得 $f(x+4)=f[(x+2)+2]=-f(x+2)=-[-f(x)]=f(x)$，所以函数 $f(x)$ 的周期为 4，所以 $f(105.5)=f(4\times 27-2.5)=f(-2.5)=f(2.5)=2.5$.

4.解析：由已知得 $\log_m(xyz)=\log_m x+\log_m y+\log_m z=\dfrac{1}{12}$，而 $\log_m x=\dfrac{1}{24}$，$\log_m y=\dfrac{1}{40}$，故 $\log_m z=\dfrac{1}{12}-\log_m x-\log_m y=\dfrac{1}{12}-\dfrac{1}{24}-\dfrac{1}{40}=\dfrac{1}{60}$，即 $\log_z m=60$.

5.解：由 $\dfrac{\tan\alpha}{\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})}=\dfrac{\tan\alpha(1-\tan\alpha)}{\tan\alpha+1}=-\dfrac{2}{3}$,得 $\tan^2\alpha-5\tan\alpha-2=0$,解得 $\tan\alpha=2$，$\tan\alpha=-\dfrac{1}{3}$,又 $\sin(2\alpha+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 2\alpha+\cos 2\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{2\tan\alpha+1-\tan^2\alpha}{\tan^2\alpha+1}$,

将 $\tan\alpha=2$ 或 $\tan\alpha=-\dfrac{1}{3}$ 分别代入上式,可得 $\sin(2\alpha+\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{\sqrt{2}}{10}$.

6.解析：当直线 l 的斜率不存在时，$x=1$，符合条件

当直线 l 的斜率存在时，设直线 l 方程为 $y-2=k(x-1)$

所以圆心到直线 $kx-y+2-k=0$ 的距离为 $\dfrac{|2k+1|}{\sqrt{k^2+1}}$，

由 $\left(\dfrac{|2k+1|}{\sqrt{k^2+1}}\right)^2+\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{2}\right)^2=9$，解得 $k=\dfrac{3}{4}$，即直线 l 的方程为 $3x-4y+5=0$

综上，所求直线 l 的方程为 $x=1$ 或 $3x-4y+5=0$.

7. **解析**: $(a+\dfrac{1}{a})(b+\dfrac{1}{b})=ab+\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}+\dfrac{1}{ab}=ab+\dfrac{a^2+b^2}{ab}+\dfrac{1}{ab}=ab+\dfrac{(a+b)^2-2ab}{ab}+\dfrac{1}{ab}$ $=ab+\dfrac{2}{ab}-2$，由于 $a>0,b>0,a+b=1\Rightarrow ab\in(0,\dfrac{1}{4}]$，而函数 $y=t+\dfrac{2}{t}-2$ 在 $t\in(0,\dfrac{1}{4}]$ 时单调递减，所以最小值是 $\dfrac{25}{4}$.

8. **解析**: 设 $\overrightarrow{CO}=y\overrightarrow{BC}$，$\because\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{AC}+y\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}+y(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=-y\overrightarrow{AB}+(1+y)\overrightarrow{AC}$.

$\because\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{CD}$，点 O 在线段 CD 上(与点 C，D 不重合)，

$\therefore y\in\left(0,\frac{1}{3}\right)$，$\because\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+(1-x)\overrightarrow{AC}$，$\therefore x=-y$，$\therefore x\in\left(-\frac{1}{3},0\right)$

9.解析：不等式 $kS\leqslant 3b^2+3c^2-a^2$ 恒成立,即 $k\leqslant\dfrac{3b^2+3c^3-a^2}{S}=\dfrac{2(3b^2+3c^3-a^2)}{bc\sin A}$ 恒成立,

又由余弦定理有 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，$\therefore k\leqslant\dfrac{4(b^2+c^2+bc\cos A)}{bc\sin A}$ 恒成立,$\therefore$ 只需 $k\leqslant[\dfrac{4(b^2+c^2+bc\cos A)}{bc\sin A}]_{min}$，

$\because\frac{4(b^2+c^2+bc\cos A)}{bc\sin A}\geq\frac{4(2bc+bc\cos A)}{bc\sin A}=\frac{4(2+\cos A)}{\sin A}$,当且仅当 $b=c$ 时取等号.

令 $f(x)=\dfrac{2+\cos x}{\sin x},x\in(0,\pi)$,则 $f'(x)=-\dfrac{1+2\cos x}{\sin^2 x}$,令 $f'(x)=0$,则 $x=\dfrac{2\pi}{3}$,

$\therefore$ 当 $0<x<\dfrac{2\pi}{3}$ 时,$f'(x)<0$；当 $\dfrac{2\pi}{3}<x<\pi$ 时,$f'(x)>0$,

$\therefore f(x)$ 在 $(0,\dfrac{2\pi}{3})$ 上单调递减,在 $(\dfrac{2\pi}{3},\pi)$ 上单调递增,$\therefore$ 当 $x=\dfrac{2\pi}{3}$ 时,$f(x)_{min}=\sqrt{3}$.

故当 $A=\dfrac{2\pi}{3}$ 时,$(\dfrac{4(2+\cos A)}{\sin A})_{min}=4\sqrt{3}$,$\therefore k\leqslant 4\sqrt{3}$,$\therefore k$ 的最大值为 $4\sqrt{3}$.

10.解：因为$xf'(x)+f(x)>1$,即$xf'(x)+f(x)-1>0$,
令$F(x)=x[f(x)-1]$,则$F'(x)=xf'(x)+f(x)-1>0$,
又因为$f(x)$是在R上的偶函数,所以$F(x)$是在R上的奇函数,所以$F(x)$是在R上的单调递增函数,
又因为$e^x f(e^x)-axf(ax)>e^x-ax$,可化为$e^x[f(e^x)-1]>ax[f(ax)-1]$,即$F(e^x)>F(ax)$,
又因为$F(x)$是在R上的单调递增函数,所以$e^x-ax>0$恒成立,
令$g(x)=e^x-ax$,则$g'(x)=e^x-a$,所以$g(x)$在$(-\infty,\ln a)$单调递减,在$(\ln a,+\infty)$上单调递增,
所以$g(x)_{min}=a-a\ln a>0$,则$1-\ln a>0$,所以$0<a<e$．所以正整数a的最大值为2．

11.解析：(1) 因为$A(-3,4)$，所以$OA=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$，

又因为$AC=4$，所以$OC=1$，所以$C(-\frac{3}{5},\frac{4}{5})$，由$BD=4$，得$D(5,0)$，

所以直线CD的斜率$\dfrac{0-\frac{4}{5}}{5-\left(-\frac{3}{5}\right)}=-\frac{1}{7}$，所以直线$CD$的方程为$y=-\frac{1}{7}(x-5)$，即$x+7y-5=0$．

(2)设$C(-3m,4m)(0<m\leqslant 1)$，则$OC=5m$．则$AC=OA-OC=5-5m$，

因为$AC=BD$，所以$OD=OB-BD=5m+4$，所以D点的坐标为 $(5m+4,0)$

又设ΔOCD的外接圆的方程为$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，

则有$\begin{cases}F=0,\\9m^2+16m^2-3mD+4mE+F=0,\\(5m+4)^2+(5m+4)D+F=0.\end{cases}$解之得$D=-(5m+4),F=0$，$E=-10m-3$，

所以ΔOCD的外接圆的方程为$x^2+y^2-(5m+4)x-(10m+3)y=0$，

整理得$x^2+y^2-4x-3y-5m(x+2y)=0$，令$\begin{cases}x^2+y^2-4x-3y=0,\\x+2y=0\end{cases}$，

所以$\begin{cases}x=0,\\y=0.\end{cases}$（舍）或$\begin{cases}x=2,\\y=-1.\end{cases}$所以△$OCD$的外接圆恒过定点为$(2,-1)$．

12.解析：（1）因为函数$f(x)=x+\frac{a}{x}$的图象过点$A(2,\frac{5}{2})$，所以$\frac{5}{2}=2+\frac{a}{2}$，解得$a=1$，

所以$f(x)=x+\frac{1}{x}$，函数$f(x)$的单调递减区间是$(0,1)$．

（2）设$P\left(x_0,x_0+\frac{1}{x_0}\right)$，直线$PM$的斜率为$-1$，则$PM$的方程$y-\left(x_0+\frac{1}{x_0}\right)=-\left(x-x_0\right)$，

联立$\begin{cases}y=x\\y-\left(x_0+\frac{1}{x_0}\right)=-\left(x-x_0\right)\end{cases}$，解得$M\left(x_0+\frac{1}{2x_0},x_0+\frac{1}{2x_0}\right)$．

（3）$|PM|=\frac{|x_0-y_0|}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}x_0}$，$|OM|=\sqrt{2}\left(x_0+\frac{1}{2x_0}\right)$，

所以，$S_{\Delta OPM}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\left(x_0+\frac{1}{2x_0}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}x_0}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2x_0^{\ 2}}+1\right)$，$N\left(0,x_0+\frac{1}{x_0}\right)$，

$S_{\Delta OPN}=\frac{1}{2}\cdot\left(x_0+\frac{1}{x_0}\right)\cdot x_0=\frac{1}{2}x_0^2+\frac{1}{2}$，所以，$S_{OMPN}=S_{\Delta OPM}+S_{\Delta OPN}=\frac{1}{2}(x_0^2+\frac{1}{2x_0^2})+1$，

即$S_{OMPN}\geqslant 1+\frac{\sqrt{2}}{2}$，当且仅当$x_0=\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$时，等号成立.

所以，此时四边形$OMPN$面积有最小值$1+\frac{\sqrt{2}}{2}$．