

江苏省仪征中学 2021-2022 学年度第一学期高三数学学科导学案

§ 9.2 三角函数的图像与性质

研制人：刘威 审核人：陈宏强

班级：_____ 姓名：_____ 学号：_____ 授课日期：2021.10.26

- ①借助单位圆理解任意角三角函数的定义，能画出这些三角函数的图象，了解三角函数的周期性、奇偶性、最大（小）值。借助单位圆的对称性，利用定义推导出诱导公式（ $\alpha \pm \frac{\pi}{2}$ ， $\alpha \pm \pi$ 的正弦、余弦、正切）。
- ②借助图象理解正弦函数在、余弦函数 $[0, 2\pi]$ 上、正切函数在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上的性质。
- ③了解 $y = A\sin(\omega x + \phi)$ 的意义；能借助图象理解参数 ω ， ϕ ， A 的意义，了解参数的变化对图象的影响。

课前热身

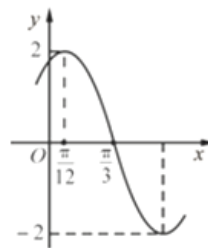
1. 若将函数 $y = 2\sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度，则平移后的图象的对称轴为()
- A. $x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6} (k \in \mathbb{Z})$ B. $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6} (k \in \mathbb{Z})$
- C. $x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{12} (k \in \mathbb{Z})$ D. $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12} (k \in \mathbb{Z})$
2. 设函数 $f(x) = \frac{1}{2}\sin(\omega x + \frac{\pi}{3}) (\omega > 0)$ 的最小正周期为 π ，则下列说法正确的是()
- A. 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 对称 B. 函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{\pi}{12}, 0)$ 对称
- C. 函数 $f(x)$ 在 $(-\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{12})$ 上单调递减 D. 函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{5\pi}{12}$ 个单位，得新函数是偶函数
3. 函数 $y = 2\sin(\frac{\pi}{3} - 2x)$ 的单调递增区间是()
- A. $[k\pi - \frac{\pi}{12}, k\pi + \frac{5\pi}{12}] (k \in \mathbb{Z})$ B. $[k\pi + \frac{5\pi}{12}, k\pi + \frac{11\pi}{12}] (k \in \mathbb{Z})$
- C. $[k\pi - \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{\pi}{6}] (k \in \mathbb{Z})$ D. $[k\pi + \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{2\pi}{3}] (k \in \mathbb{Z})$
4. 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \frac{\pi}{4}) (\omega > 0)$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{8})$ 上单调递增，则 ω 的最大值为()
- A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. 2 D. 4
5. (多) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |\cos x|, & \sin x \geq \cos x \\ |\sin x|, & \sin x < \cos x. \end{cases}$ 则下列说法正确的是()
- A. $f(x)$ 的值域是 $[0, 1]$ B. $f(x)$ 在 $[0, 2\pi)$ 上有 2 个零点
- C. $f(x)$ 在区间 $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ 上单调递增 D. $f(x)$ 是以 π 为最小正周期的周期函数
6. 将函数 $f(x) = \cos(x - \frac{\pi}{6})$ 的图象上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ (纵坐标不变)，再把得到的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到函数 $g(x)$ 的图象，则 $g(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$ 上的值域为 _____.

知识梳理

1. 三角函数定义 2. 诱导公式 3. 三角函数图像与性质

典例研究

例 1. 如图为函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}, x \in \mathbb{R}$) 的部分图象.



(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式; (2) 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间;

(3) 若方程 $f(x) = m$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ 上有两个不相等的实数根, 求实数 m 的取值范围.

例 2. 已知函数 $f(x) = 2\sin x \cos x + 2\sqrt{3}\cos^2 x - \sqrt{3}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调减区间;

(2) 将函数 $y = f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位, 再将所得的图象上各点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 纵坐标不变, 得到函数 $y = g(x)$ 的图象, 求 $y = g(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{8})$ 上的值域.

例 3. 已知函数 $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{3}) - 2\sqrt{3}\cos^2 x + \sqrt{3}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间、对称轴、对称中心;

(2) 当 $x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ 时, 不等式 $2m \geq \frac{(m+1)f(x)+2m+1}{f(x)+2}$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

课堂小结

跟踪反馈

1. 为了得到函数 $y = 4\sin x \cos x$, $x \in R$ 的图象, 只要把函数 $y = \sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x$, $x \in R$ 图象上所有的点()

A. 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度

B. 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度

C. 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

D. 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

2. 已知函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示, 若将 $f(x)$ 图

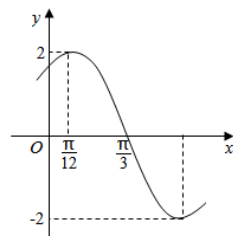
象上的所有点向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位得到函数 $g(x)$ 的图象, 则函数 $g(x)$ 的单调递增区间为()

A. $[k\pi - \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{\pi}{4}], k \in Z$

B. $[2k\pi - \frac{\pi}{4}, 2k\pi + \frac{\pi}{4}], k \in Z$

C. $[k\pi - \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{\pi}{6}], k \in Z$

D. $[2k\pi - \frac{\pi}{3}, 2k\pi + \frac{\pi}{6}], k \in Z$



3. 函数 $y = 2\sin^2 x - 3\cos x - 1$ 的值域为()

A. $[2, \frac{17}{8}]$

B. $[-4, 2]$

C. $(-\infty, \frac{17}{8}]$

D. $[-4, \frac{17}{8}]$

4. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x)$, ($\omega > 0$) 在区间 $[-\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}]$ 上是增函数, 且在区间 $[0, \pi]$ 上恰好取得一次最大值 1,

则 ω 的取值范围是()

A. $(0, \frac{3}{5}]$

B. $[\frac{1}{2}, \frac{3}{5}]$

C. $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$

D. $[\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$

5. 若方程 $2\sqrt{3}\sin x \cos x + 2\cos^2 x - m - 1 = 0$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上有实根, 则实数 m 的取值范围是()

A. $[0, 2]$

B. $[-1, 2]$

C. $[0, \sqrt{3}]$

D. $[-1, \sqrt{3}]$

6. (多) 将曲线 $y = \sin^2 x - \sqrt{3}\sin(\pi - x)\sin(x + \frac{3\pi}{2})$ 上每个点的横坐标伸长为原来的 2 倍(纵坐标不变), 得

到 $g(x)$ 的图象, 则下列说法正确的是()

A. $g(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{3\pi}{2}$ 对称

B. $g(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上的值域为 $[0, \frac{3}{2}]$

C. $g(x)$ 的图象关于点 $(\frac{\pi}{6}, 0)$ 对称

D. $g(x)$ 的图象可由 $y = \cos x + \frac{1}{2}$ 的图象向右平移 $\frac{2\pi}{3}$ 个单位长度得到

7. (多) 关于函数 $f(x) = 1 + \cos x - t$, $x \in (\frac{\pi}{3}, 2\pi)$, (t 为常数) 的零点情况, 下列说法正确的是()

A. 当 $t < 0$ 或 $t \geq 2$ 时, 有 0 个零点. B. 当 $t = 0$ 或 $\frac{3}{2} \leq t < 2$, 有 1 个零点.

C. 当 $0 < t \leq \frac{3}{2}$ 时, 有 2 个零点. D. 当 $0 < t < 2$ 时, 有 2 个零点.

7. 函数 $y = \sin x - \sqrt{3}\cos x$ 的图象可由函数 $y = 2\sin x$ 的图象至少向右平移 _____ 个单位长度得到.

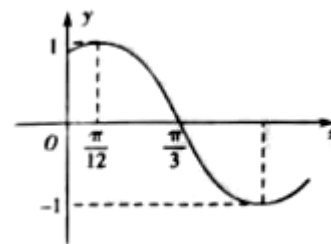
8. 已知函数 $y = a \sin 2x + \cos 2x$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 对称, 则 a 的值为_____.

9. 函数 $y = \sin x - \cos x + \sin x \cos x$ 的值域为_____.

10. 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$) 的图象如图.

(1) 求 $f(x)$ 的单调递增区间;

(2) 将函数 $y = f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度得到曲线 C , 把 C 上各点的横坐标保持不变, 纵坐标变为原来的 2 倍得到 $g(x)$ 的图象, 且关于 x 的方程 $g(x) - m = 0$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上有解, 求 m 的取值范围.



11. 已知函数 $f(x) = \sin x + \cos x$, $g(x) = \sin 2x - f(x)$.

(I) 求函数 $y = f(x)$ 图象的对称轴的方程;

(II) 当 $x \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$ 时, 求函数 $g(x)$ 的值域;

(III) 设 $h(x) = \frac{9^x - 1}{9^x + 1}$, 存在集合 M , 当且仅当实数 $m \in M$, 且在 $x \in (0, +\infty)$ 时, 不等式 $mh(\frac{x}{2}) - h(x) > 0$ 恒成立. 若在 (II) 的条件下, 恒有 $ag(x) \notin M$ (其中 $a > 0$), 求实数 a 的取值范围.