

# 高中数学建模教学:现实困境与突围路径<sup>\*</sup>

李 凯 (重庆第二师范学院 400065)

**摘 要:**数学建模,作为高中课程标准提出的数学核心素养之一,要求其理念贯穿整个高中数学教育的始终.本文通过相关调研,试图从认知教学困境出发,探索其教学实施的路径指导,旨在有效开展高中数学建模教学及实施数学课程标准提供一些参考建议.

**关键词:**高中数学;建模教学;现实困境;突围路径

随着我国科学技术的蓬勃发展,创新强国意识的不断深化,对于培养学生解决问题与实践创新能力的要求显得尤为重要,而数学建模恰恰是实现培养学生应用与创新意识、发展学生数学核心素养的重要载体与实践平台.为落实立德树人伟大育人工程,教育部新修订《普通高中数学课程标准(2017年版)》(下称《课标2017》)将数学建模列为数学核心素养之一<sup>[1]</sup>,并针对数学建模教学明确作出具体课时、内容、形式等的要求,使得数学建模教学向走进课堂迈入历史性的一步.然而,一线高中数学教师对于建模教学的定位与价值认知不明确,尤其是在教学的具体操作层面上往往存有困惑及盲区.

## 1 高中数学建模教学:现实困境

### 1.1 教师对建模教学的价值认知与定位有待提高

通过前期调研得到的数据来看,目前高中数学建模教学首要的问题在于教师认识层面,教师对于数学建模教学定位与价值认识不清晰,导致教学缺乏明确的目标,教学设计更无从谈起.因为教学是教师的教与学生的学的双向活动,如果教师本身的认识达不到一定的高度,那么教学很难有效地开展.正如有“考试不涉及建模,教了也没用”“数学建模与数学应用题没什么区别”等诸如此类看法的教师不在少数,可见教师对建模教学的认识普遍不清晰.其次,是能力的问题,才高为师,倘若教师没有指导学生开展数学建模教学的能力,那么教学更是难上加难,当然也很难想象教师通过数学建模教学能培养出建模能力较强的学生和水平较高的教学成果等.常言道:“要想给学

生一碗水,老师必须要有一桶水”.访谈中也得出少部分教师对于建模教学重要性的认可程度较高,可难点是缺乏指导学生开展建模教学的方法论上的知识,使得教学难以朝着课程标准的的要求来推行实施,显然仅有教学定位的认识还远远不够,必须要有在传统教学的基础上做出转变的教学思路与方法.

### 1.2 国家缺失建模教学指导的师资培训保障

教师培训是教师提升其专业技能与素养的重要平台.对于新教师而言处在一个刚刚适应教师这种角色的过程之中,教学的技能与经验较为匮乏,日常的数学教学或许可以慢慢胜任,但对于数学建模教学,绝大部分教师有很大的困惑,究竟如何开展这样的教学显得心中无底.数学建模教学活动有效性与教师的指导密不可分,然而,国家教育部与财政部开展的国家级教师培训工作,对于数学教学设计了很多模式下的具体讲授,但对于具体的数学建模教学涉及几乎很少,省市区教师培训更是少之又少,这直接导致一线教师缺失数学建模教学方法论的知识,致使对于数学建模教学惯用以往的教学模式,<sup>[2]</sup>使得建模教学效果不显著,学生收获不突出.

### 1.3 学校缺乏有力的软硬件设施来保证教学

目前一线教师本身教学非常辛苦,承受着方方面面的压力,负担过重.因而,对于开展数学建模教学活动往往是力不从心,心有余而力不足.加之学校层面往往忽视对教师开展数学建模教学提供物质与精神上的大力支持,学校领导层往往以影响教学正常进度为由严禁教师开展数学建模教学活动,认为花费时间和精力多而对于教学质量

<sup>\*</sup> 本文系重庆市人文社科重点研究基地“重庆市统筹城乡教师教育研究中心”课题资助(编号:JDKT201908)的阶段性研究成果;重庆第二师范学院2019年度校级科研项目(编号:KY201901C)的阶段性研究成果;重庆第二师范学院2020年校级教育改革研究课程思政专项(编号:JG202045)的阶段性成果.

却没有太多实质性的提高.因此,对于数学建模教学活动,甚至是连续几天的数学建模竞赛也是持消极不予支持的态度,建模缺乏物质支持与时空支撑,教师与学生很难正常开展建模教学活动.

#### 1.4 教育考试制度与高中数学课程标准脱节

实验版高中数学课程标准虽然对于课程内容、选择性等有明确的要求,但是并没有对于考试命题等提出具体的相关要求,当然更没有赋予指导考试命题的功能.于是在具体教学实施过程中教师对于课程标准的态度与认同感明显低于《数学考试大纲》.“不考那我们还教这有什么用”这样的教师言论也说明了这一现象的普遍存在.

国家数学课程标准中对数学建模教学课时等都有着明确的任务要求,并且在教学建议中也重申学校可以开发一些符合自己学校的校本课程,然而对于设计校本课程的具体操作层面的细则并没有大致的建议,校本课程在某一程度上只反映该校的教学方案,很难与国家课程标准进行很好的对接.校本课程具有显著的局限性,有时还存在较大的突出问题.究其原因主要是因为缺乏与数学建模相配套的考试制度,倘若考试不涉及对数学建模类题目的考查,那么教学显得很多余,学校的教学依旧完全围绕着考试进行.

## 2 高中数学建模教学:突围路径

数学建模是一个微型的课题研究,其形式类似于科学研究的很多环节,因此,每一个小环节的教学策略与教师指导都是必不可少的,教师在克服困难的同时,应努力做好各个环节的指导工作.<sup>[3]</sup>《课标 2017》的教学要求中指出<sup>[1]</sup>:课题研究的过程包括选题、开题、做题、结题四个环节.本文尝试结合一些教与学的相关理论来提出数学建模教学各环节的教学策略,通过学校开展案例的经验为我们今后开展数学建模教学提供最有利、最具针对性的有效途径.

### 2.1 尝试以问题情境性为选题的原则,多渠道多途径开发获取研究问题

问题是数学的心脏,也是问题解决的前提.显然,开展教学的载体必须是问题,因此,教师在这一环节需要对学生进行积极引导与指导.然而,目前为止,全球范围内还没有切合高中学生开展建模教学的教材,因而,选择适宜的问题显得至关重要,尤其是对刚接触数学建模的学生而言.选题策略将从问题选择指导与信息查询指导两个方面进行.

课程标准对于建模教学选题要求是:学生需要撰写开题报告,教师要组织开展“开题”交流活动.因此,教师在选题环节需要对于学生的研究问题进行选择性指导并且对于信息查询等也要给予相应的指导.

### 2.2 强调以数据库为支撑的信息查询,以课程标准为导向规范开题报告

信息查询策略,在现代互联网信息化的时代,对于教师指导学生开展研究报告的撰写提出了更为复杂的挑战.首先,是信息查询指导,我们都知道拥有丰富的信息和文献资料是支撑开展数学建模教学最根本的前提之一.因此,当学生选定选题后,教师要对于学生所选的选题给予信息查询指导,学生通过资料和信息,可以很清楚地了解到当前该选题的研究现状和还存在的问题是什么,这对于问题是否有意义继续开展下去至关重要.教师应鼓励学生使用现代信息化产品及技术,比如计算机、计算器、画图软件等,并倡导通过中文或外文数据库查询资料,有必要的情况下教师需给予学生有力的指导.

开题报告策略,开题报告是学生进行研究的重要书面性材料,学生在确定选题后查阅大量文献资料的基础上,对于自己所研究的问题制定一个研究性计划,并把这个研究计划进行汇报,以征得师与生的建议,详细地分析计划的可行性,找出研究方案存在的问题与不足.<sup>[3]</sup>因此教师对于开题报告的指导可以细分为以下两个方面:

写好开题报告.教师可以在研究之前对于开题报告的内容进行培训,也可以提供给学生规范的开题报告模板.开题报告应包括选题的意义、文献综述、解决问题思路、研究计划、预期结果等.<sup>[4]</sup>教师积极引导学生按照格式要求进行文本梳理,起草开题报告.

做好开题之后的修订工作.对于开题中教师与学生的建议和疑问,小组内要进行深入讨论,对于开题中存在的不妥之处进行认真修订与完善.以确保数学建模后续工作开展的有效性.

### 2.3 倡导问题驱动团队协作操作模式,发挥教师全程参与引导的主导性

“做题”是解决问题的过程,包括描述问题、数学表达、建立模型、求解模型、得到结论、反思完善等过程.<sup>[5]</sup>建构主义的知识观认为:知识它不是问题的最终答案,它必将随着人们认识程度的深入而不断地变革、升华和改写,出现新的解释和

假设.因此,数学建模教学同样也是学生主动尝试对客观世界不断地解释、假设等的一个过程,只有进行时没有完成时.

数学建模教学涉及的操作模式有:讲述启发式、操作引导式、交流探讨—实践活动式、专题作业/报告式、自主课题式.问题驱动是建模教学的动力源泉,所以尽管建模教学的模式较多,但是其核心是问题驱动下的学生体验式教学,因此下面就这种主要教学模式进行简要的分析.

教师在建模教学过程中扮演着多种角色,而在具体的建模活动开展中则扮演着教学指导者的身份.教师应该清楚地认识到,最重要的是尊重学生的思路和想法,在其恰当时去验证,不恰当时进行辅助改进.因此,在课堂教学中,教师要勤于在教室里踱步,认真聆听小组间学生的讨论,及时记录并在恰当时机评估每个组的进程.当听到某个小组的方案已经走向偏离状态时,教师需要注意方式妥善地处理这种情况,如果处理不当极易影响到学生的积极性与热情度,这时可以采取给予学生正面引导的方式,比如添加一些学生未考虑到因素,让学生检验自己的模型是否存在问题,这样的引导对学生而言是积极的,学生也容易接受并采纳,当然也可以将问题抛给其他小组,并让其他小组评估模型的可行性并提出改进建议.

#### 2.4 指导学生规范研究报告书写格式,激励学生围绕成果进行答辩汇报

课程标准要求:“结题”包括撰写研究报告和报告研究结果,由教师组织学生开展结题答辩.<sup>[5]</sup>根据选题的内容,报告可以采用专题作业、测量报告、算法程序、制作的实物、研究报告或小论文、交流会等多种形式.<sup>[4]</sup>

指导学生规范研究报告书写格式,结题要求学生撰写研究报告,对于高中生而言,之前尚未接触过类似的写作训练,因此这时教师应该发挥积极引导的作用,力求学生在撰写报告过程中顺利并收获写作学术报告的心路历程,避免学生出现写作上的畏难情绪.报告应该包括问题提出的背景、问题解决方案的设计、问题解决的过程、操作模式、结果的评价与反思及参考文献、必要的附录部分等.<sup>[6]</sup>

结题答辩指导策略,对于成果的答辩是建模教学阶段性总结的重要环节,成果可以是研究报告、小论文、应用型软件APP等,学生需要在教师的指导下对于整个研究历程进行汇报以及听取答

辩组老师的点评.可以邀请专家、教师及学生等进行提问与交流,给出定性评价.

教学评价指导,评价是对教学的回顾与反思.数学模型(和它们产生的结果)是与创建模型时所作的假设紧密相连的.评估应当有助于帮助学生提高他们的数学建模能力,届时这将转变为一个更好的教育成果.<sup>[7]</sup>教师在建模教学过程中要积极发挥良好的引导作用,对于教学过程及生成性成果进行客观公正的评价工作.评价的具体操作可以分阶段进行,分为诊断性、形成性、终结性三个过程,这样做的目的是对于建模教学的全过程进行评价,而不仅仅停留在结果的评价层面.同时教师应该对于知识的复杂程度进行分级评估,让不同层次的学生能体会到随着教学的进行自己在努力,而不是一直遭受着重复迭代循环、失败的情绪.因此,数学建模教学评价在权衡诊断、形成、终结性三个阶段的同时,时刻注重过程.评价学生在建模过程中的适应性与能力是一项艰巨的任务,当学生们为一个建模问题开展研究,在团队作用下积极交流,从一个过程走向另一个过程又退回思考等等,都必须被教师及时发现并评价.“随走评估”是对教学更贴近、更负责的评价方式,教师通过全程参与,聆听学生之间的激烈讨论及小组间的阶段性汇报等,及时给予建设性建议,全程观察得到学生在教学过程中所突显的优缺点,这比结果评价更有价值.

方案反思性指导,结题并不意味着建模教学的完成,建模活动只有进行时,没有完成时,因为前文提到了建模教学过程是为解决现实问题寻求优化方案,即使是优化方案势必仍有瑕疵,因此对于方案的反思显得至关重要.正如斯波罗(R. J. Spiro)建议,为了达到获得更深层次高级知识的目的,很有必要在不同的时刻,重新安排背景,设定不同的目的与不同的假设对于同一材料进行温故.这对于研究问题的解决方案无疑是一次全面的深化与完善,不仅仅是为解决问题,更是为了用多种方式来表征现实问题.

### 3 结语

《课标2017》已经颁布,然而,目前我国绝大多数省份未将数学建模列为常规教学.因此,实施高中数学建模需要一个漫长且艰难的过程.<sup>[8]</sup>本文主要结合调研分析当前实施建模教学的种种困境及困难,尝试探讨数学建模的选题、开题、做题、

(下转第19页)

$\{a_{n+1} + pa_n\}$  是等比数列?

**解** 假设存在常数  $p$ , 使得  $\{a_{n+1} + pa_n\}$  是等比数列, 则存在非零常数  $q$ , 对任意  $n \in \mathbf{N}^*$ ,

$$\frac{a_{n+2} + pa_{n+1}}{a_{n+1} + pa_n} = q, \text{整理得 } (1+p-q)a_{n+1} + (1-pq)a_n = 0, \text{对任意 } n \in \mathbf{N}^* \text{ 都成立. 所以 } q = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, p = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \text{ 或 } q = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, p = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

**问题 12** 能否由此结论进一步探索斐波那契数列的通项公式?

**解** 由问题 11 可得存在  $q = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, p = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$  或  $q = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, p = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ , 使得  $\{a_{n+1} + pa_n\}$  是等比数列. 因此有  $a_{n+1} + \frac{-1+\sqrt{5}}{2}a_n = \left(a_2 + \frac{-1+\sqrt{5}}{2}a_1\right) \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$  ①,  $a_{n+1} + \frac{-1-\sqrt{5}}{2}a_n = \left(a_2 + \frac{-1-\sqrt{5}}{2}a_1\right) \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$  ②. ① - ②, 即可得到斐波那契数列的通项公式  $a_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \left[ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right]$ .

**设计意图** 概念的创造性应用, 以学生熟知的斐波那契数列为背景, 唤起研究兴趣; 以问题 11 搭建研究中间环节, 并利用化归思想和等比数列求通项的方法, 得到斐波那契数列通项公式. 问题 11 这一中间环节的搭建与问题 9、10 具有同样的研究路径, 可由教师搭建, 更可由学生自行提

出. 这一组问题提供了(等比)数列研究方式在实际问题解决中的一般路径与方法, 发展了学生解决问题的能力 and 素养.

**问题 13** 回顾等比数列学习过程, 总结数列研究的一般路径与方法.

**问题 14** 思考面对一个陌生数列如何开展数列研究的一般方法.

**设计意图** 总结思考, 形成概念结构系统. 回顾反思数列学习认知规律, 把握数列概念作为研究基础的重要性; 明确数列研究的一般方法——基于代数运算的研究, 构建数列概念系统的认知结构.

#### 4 小结

基于数学核心概念的教学基本结构研究, 旨在以数学核心概念建构为起点, 梳理数学知识逻辑发展的结构, 并探索概念发展与运用的一般规律和方法.

概念的认识与理解是一个长期的、不断螺旋上升的过程, 需要经历“事实—原理—结构—应用—观念”几个过程. 本文在开展以上环节的实施过程中, 高度重视核心概念原理解构中概念逻辑发展的结构; 从概念剖析出发, 通过不同概念比较辨析、同类概念联系明晰、发展概念性质完善概念, 并在理解基础上精致概念.

基于数学核心概念的教学价值, 在于其可不断生长发展的生命力. 而概念生长发展的程度, 也是评价概念解构过程是否充分完整的重要指标.

当然, 基于数学核心概念的网络系统建构不是一蹴而就的, 需要始终坚持基于数学核心概念的新课教学和复习课整合, 在循环往复中动态建构.

(上接第 9 页)

结题四个教学环节, 相信通过教育及考试部门, 尤其是一线师生的共同努力, 高中数学建模教学一定会落地生根, 根植核心素养.

#### 参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017年版)[M]. 北京: 人民教育出版社, 2018.
- [2] 黄鹏先. 练好课堂教学基本功[J]. 贵州教育, 1997(10): 16-17.
- [3] 刘卫锋. 高中数学建模中教师问题研究[D]. 北京: 首都师范大学, 2005.

- [4] 张思明. 做好中学数学建模, 提升数学课程价值[J]. 中国教师, 2016(9): 57-62.
- [5] 王尚志. 如何在数学教育中提升学生的数学核心素养[J]. 中国教师, 2016(9): 33-38.
- [6] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(实验稿)[M]. 北京: 人民教育出版社, 2003.
- [7] 梁贯成等编译. 数学建模教学与评估指南[M]. 上海: 上海大学出版社, 2017.
- [8] 李凯. 高中数学建模教学: 目标定位与路径选择——基于《数学建模教学与评估指南》一书阐释[J]. 中学数学杂志, 2019(1): 4-6.