江苏省仪征中学 2021 届第一学期高三数学周练试卷

2020.9.26

一、选择题（本大题共 8 小题，共 40.0 分）

1.　设全集$U=R$，集合$A=\{y|y=\log_2 x,x>2\}$，$B=\{x|y=\sqrt{x-1}\}$，则( )

A. $A\subseteq B$　　B. $A\cup B=A$　　C. $A\cap B=\varnothing$　　D. $A\cap(C_UB)\neq\varnothing$

【答案】A

【解析】

【分析】

本题考查集合间的关系和集合的运算，属基础题，难度不大.

解出集合 A，B，再分别判断四个答案即可.

【解答】

解：集合$A=\{y|y=log_2x,x>2\}=\{y|y>1\}$，

$B=\{x|y=\sqrt{x-1}\}=\{x|x\geqslant 1\}$，$\complement_UB=\{x|x<1\}$，

$\therefore A\subseteq B$，$A\cup B=B,A\cap B=A$，

$A\cap(\complement_UB)=\varnothing$，

则 A 对，BCD 均错.

故选 A.

2.　已知 $a=2^{-\frac{1}{3}}$，$b=\log_2\frac{1}{3}$，$c=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}$，则（　　）

A. $a>b>c$　　B. $a>c>b$　　C. $c>a>b$　　D. $c>b>a$

【答案】C

【解析】

【分析】

本题考查指数函数和对数函数的性质，考查比较大小，属于基础题.

借助指数函数和对数函数的单调性得出a,b,c与 0, 1 这样的特殊值的大小关系，从而得出答案.

【解答】

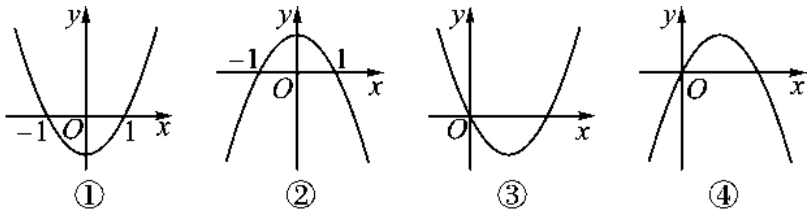
解：$\because 0<a=2^{-\frac{1}{3}}<2^0=1$，

$b=\log_2\frac{1}{3}<\log_2 1=0$，$c=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}>\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}=1$，

$\therefore c > a > b$,

故选 C.

3. 下面四个函数图象中，有函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+(a^2-1)x+1(a\in R)$的导函数 $y=f'(x)$的图象，则 $f(-1)=(\ )$



A. $\frac{1}{3}$　　B. $-\frac{2}{3}$　　C. $\frac{7}{3}$　　D. $-\frac{1}{3}$或$\frac{5}{3}$

【答案】D

【解析】

【分析】此题考查了导数的运算，二次函数的图象与性质，熟练掌握导数的运算是解本题的关键.

由 $f(x)$ 解析式求出导函数 $f'(x)$ 解析式，分析得到导函数图象可能为①或③，根据函数图象分别求出 a 的值，确定出 $f(x)$ 解析式，即可求出 $f(-1)$ 的值.

【解答】

解：$\because f'(x)=x^2+2ax+a^2-1$，

$\therefore f'(x)$的图象开口向上，则排除②④.

若 $f'(x)$的图象为①，此时 $a=0$，$f(-1)=\frac{5}{3}$；

若 $f'(x)$的图象为③，此时 $a^2-1=0$，又对称轴 $x=-a>0$，

$\therefore a=-1$，$\therefore f(-1)=-\frac{1}{3}$.

故选 D.

4. 已知 $a>0$，$b>0$，$a+b=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$，则$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}$的最小值为（　　）

A. 4　　B. $2\sqrt{2}$　　C. 8　　D. 16

【答案】B

【解析】解：由$a+b=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}$，有 ab=1，

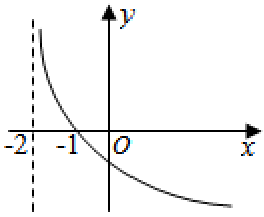
则$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\geq 2\sqrt{\frac{1}{a}\times\frac{2}{b}}=2\sqrt{2}$，

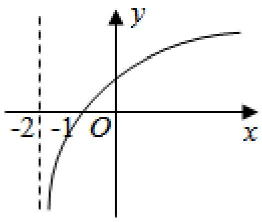
故选：B.

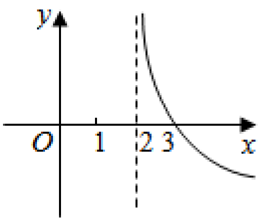
先求出 ab=1，从而求出$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}$的最小值即可.

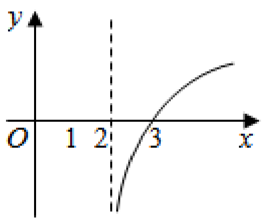
本题考查了基本不等式的性质，是一道基础题.

5. 若函数 f（x）=（k-1）a^x-a^{-x}（a>0，a≠1）在 R 上既是奇函数，又是减函数，则 g（x）=$\log_a$（x+k）的图象是（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】A

【解析】解：∵函数 f（x）=（k-1）a^x-a^{-x}（a>0，a≠1）在 R 上是奇函数，

∴f（0）=0

∴k=2，

又∵f（x）=a^x-a^{-x}为减函数，

所以 1>a>0，

所以 g（x）=$\log_a$（x+2）

定义域为 x>-2，且递减，

故选：A.

根据函数是一个奇函数，函数在原点出有定义，得到函数的图象一定过原点，求出 k 的值，根据函数是一个减函数，看出底数的范围，得到结果.

本题考查函数奇偶性和单调性，即对数函数的性质，本题解题的关键是看出题目中所出现的两个函数性质的应用.

6. 已知点 P（$\sin\frac{3}{4}\pi$，$\cos\frac{3}{4}\pi$）落在角 θ 的终边上，且 θ∈[0，2π），则 θ 的值为（　　）

A. $\frac{\pi}{4}$　　B. $\frac{3\pi}{4}$　　C. $\frac{5\pi}{4}$　　D. $\frac{7\pi}{4}$

【答案】D

【解析】

【分析】

解出点 P 的具体坐标，即可求解 θ 的值.

本题考查任意角的三角函数的定义，是基础题.

【解答】

解：点 P（$\sin\frac{3}{4}\pi$，$\cos\frac{3}{4}\pi$）即 $P(\frac{\sqrt{2}}{2}，\frac{-\sqrt{2}}{2})$，故点 P 在第四象限，

它落在角 θ 的终边上，

∴$\tan\theta=-1$,

又 $\theta\in[0，2\pi)$，θ 是第四象限角，

$\therefore\theta=\frac{7\pi}{4}$.

故选：D.

7. 奇函数 f（x）的定义域为 R，若 f（x+2）为偶函数，且 f（1）=1，则 f（8）+f（9）=（　　）

A. -2　　B. -1　　C. 0　　D. 1

【答案】D

【解析】

【分析】

本题主要考查函数值的计算，利用函数奇偶性的性质，得到函数的对称轴是解决本题的关键.

根据函数的奇偶性的性质，得到 f（x+8）=f（x），即可得到结论.

【解答】

解：∵f（x+2）为偶函数，f（x）是奇函数，

∴设 g（x）=f（x+2），则 g（-x）=g（x），

即 f（-x+2）=f（x+2），

∵f（x）是奇函数，

∴f（-x+2）=f（x+2）=-f（x-2），f（0）=0,

即 f（x+4）=-f（x），f（x+8）=f（x+4+4）=-f（x+4）=f（x），

则 f（8）=f（0）=0，f（9）=f（1）=1,

$\therefore f$（8）$+f$（9）=0+1=1，

故选：D.

8. 已知函数$f(x)=x^3-2x+1+e^x-\frac{1}{e^x}$，其中 e 是自然对数的底数．若$f(a-1)+f(2a^2)\leq 2$，则实数 a 的取值范围是(　)

A. $[-1,\frac{3}{2}]$　　B. $[-\frac{3}{2},1]$　　C. $[-1,\frac{1}{2}]$　　D. $[-\frac{1}{2},1]$

【答案】C

【解析】

【分析】

本题主要考查了函数的奇偶性，利用导数研究函数的单调性，属于较难题.令$g(x)=f(x)-1=x^3-2x+e^x-\frac{1}{e^x}$，先判断出 $g(x)$的奇偶性，利用导数判断出$g(x)$在 R 上单调递增，原不等式化为：$f(a-1)-1+f(2a^2)-1\leq 0$，即$g(a-1)+g(2a^2)\leq 0$，化为：$g(2a^2)\leqslant g(1-a)$，即为$2a^2\leqslant 1-a$，解不等式即可.

【解答】

解：令$g(x)=f(x)-1=x^3-2x+e^x-\frac{1}{e^x}$，$x\in R$．则$g(-x)=-g(x)$，$\therefore$ $g(x)$在 R 上为奇函数.

$g'(x)=3x^2-2+e^x+\frac{1}{e^x}\geqslant 0+2-2=0$，$\therefore$函数$g(x)$在 R 上单调递增.$f(a-1)+f(2a^2)\leq 2$，化为：$f(a-1)-1+f(2a^2)-1\leq 0$，即$g(a-1)+g(2a^2)\leq 0$，化为：$g(2a^2)\leq -g(a-1)=g(1-a)$，

$\therefore$ $2a^2\leq 1-a$，即$2a^2+a-1\leq 0$，解得$-1\leq a\leq\frac{1}{2}$.

$\therefore$实数 a 的取值范围是$[-1,\frac{1}{2}]$.

故选 C.

二、不定项选择题（本大题共 4 小题，共 20.0 分）

9. 下列命题中的假命题是( )

A. 命题“$\forall x\in R$，$x^2+x\geq 0$”的否定是:$\exists x_0\in R$，$x_0^2+x_0<0$

B. 设 $x\in R$，则“$2-x\geq 0$”是“$|x-1|\leq 1$”的充分而不必要条件

C. 若 $m+n=1$ 则$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$的最小值为 4

D. $a>b\Leftrightarrow ac^2>bc^2$

【答案】BCD

【解析】

【分析】

本题考查全称量词命题的否定，考查必要条件、充分条件与充要条件的判断，考查不等式性质及基本不等式求最值，属于中档题.

根据全称量词命题的否定，必要条件、充分条件的判定方法，不等式的性质及及基本不等式，逐一判断即可.

【解答】

解：A、命题“$\forall x\in R$，$x^2+x\geq 0$”的否定是:$\exists x_0\in R$，$x_0^2+x_0<0$ ，故 A 正确；

B、由 $2-x\geq 0$ 得，$x\leq 2$，由$|x-1|\leq 1$ 得 $0\leq x\leq 2$，所以“$2-x\geq 0$”是“$|x-1|\leq 1$”的必要而不充分条件，故 B 错误；

C、当 $m=-1$，$n=2$ 时，$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=-\frac{1}{2}$，故 C 错误；

D、当 $c=0$ 时，由 $a>b\nRightarrow ac^2>bc^2$，故 D 错误.

故选 BCD.

10. 下面选项正确的有( )

A. 存在实数 x，使 $\sin x+\cos x=\frac{\pi}{3}$

B. 若 α，β 是锐角△ABC 的内角，则 $\sin\alpha>\cos\beta$

C. 函数 $y=\sin(\frac{2x}{3}-\frac{7\pi}{2})$是偶函数

D. 函数 $y=\sin 2x$ 的图象向右平移$\frac{\pi}{4}$个单位长度，得到 $y=\sin(2x+\frac{\pi}{4})$的图象

【答案】ABC

【解析】

【分析】

本题考查辅助角公式，正弦函数的性质，诱导公式的运用，考查余弦函数的性质，函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象与性质，属于中档题.

将各个选项进行逐一分析求解即可.

【解答】

解：A 选项：$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，则$\sin x+\cos x\in\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$，

又$-\sqrt{2}<\frac{\pi}{3}<\sqrt{2}$,

$\therefore$存在x，使得$\sin x+\cos x=\frac{\pi}{3}$，可知$A$正确；

B选项：$\because \Delta ABC$为锐角三角形，

$\therefore \alpha+\beta>\frac{\pi}{2}$，即$\alpha>\frac{\pi}{2}-\beta$，

$\because \beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\quad \therefore \frac{\pi}{2}-\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，又$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$且$y=\sin x$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增，

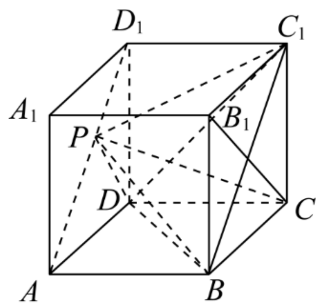
$\therefore \sin\alpha>\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\cos\beta$，可知$B$正确；

C选项：$y=\sin\left(\frac{2}{3}x-\frac{7\pi}{2}\right)=\cos\frac{2x}{3}$，则$\cos\frac{2(-x)}{3}=\cos\frac{2x}{3}$，则$y=\sin\left(\frac{2}{3}x-\frac{7\pi}{2}\right)$为偶函数，可知$C$正确；

D选项：$y=\sin 2x$向右平移$\frac{\pi}{4}$个单位得：$y=\sin 2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos 2x$，可知$D$错误.

故选ABC.

11. 长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$2BC=2BB_1=AB=2$，点 P 在线段AD_1上运动，则下列命题正确的是（　）



A. 直线B_1C与平面BPC_1所成的角为$\frac{\pi}{3}$

B. 直线A_1B_1和平面BPC_1平行

C. 三棱锥B_1-BPC_1的体积为$\frac{1}{6}$

D. 二面角$P-BC_1-D$所成的角为定值

【答案】BD

【解析】

【分析】

本题重点考查了线面位置关系，三棱锥的体积及线面角，综合度高，属于较难题.

根据长方体的结构特点，逐项进行分析即可.

【解答】

解：对于 A，长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$B_1C\perp BC_1, B_1C\perp C_1D_1$，

又$BC_1\cap C_1D_1=C_1$,BC_1，$C_1D_1\subset$平面ABC_1D_1，

所以$B_1C\perp$平面ABC_1D_1，所以 A 不正确；

对于 B，因为平面BPC_1与面ABC_1D_1是同一平面，

$A_1B_1//AB, AB\subset$平面$ABC_1D_1, A_1B_1\not\subset$平面$ABC_1D_1$，

所以 $A_1B_1//$平面BPC_1，故 *B* 正确；

对于 *C*，由 *A* 的证明可知$B_1C\perp$平面ABC_1D_1，即 $B_1C\perp$平面 PBC_1，

又$S_{\triangle PBC_1}=\frac{1}{2}\times BC_1\times AB=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times 2=\sqrt{2}$，

所以三棱锥B_1-BPC_1的体积为$\frac{1}{3}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{3}$，故 *C* 不正确；

对于 *D*，因为$P\in AD_1$，$AD_1//BC_1$，

所以二面角$P-BC_1-D$所成的角就是二面角D_1-BC_1-D所成的角，是定值，故 *D* 正确，

故选 *BD*.

12. 声音是由物体振动产生的声波,其中包含着正弦函数.纯音的数学模型是函数$y=A\sin\omega t$,我们听到的声音是由纯音合成的,称之为复合音.若一个复合音的数学模型是函数$f(x)=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x$,则下列结论正确的是（）

A. 2π是$f(x)$的一个周期；　　B. $f(x)$在$[0,2\pi]$上有 3 个零点；

C. $f(x)$的最大值为$\frac{3\sqrt{3}}{4}$；　　D. $f(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上是增函数.

【答案】*ABC*

【解析】

【分析】

本题主要考查三角函数模型的应用，涉及到函数的周期定义、二倍角公式、利用导数求最值、判断函数单调性，涉及函数的零点，属于中档题.

根据周期性定义得到 *A* 正确，解方程求得零点个数得到 *B* 正确，利用导数求得最值得到 *C* 正确，*D* 不正确.

【解答】

解：$\because f(x+2\pi)=\sin(x+2\pi)+\frac{1}{2}\sin 2(x+2\pi)=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x$,*A* 正确；

由 $f(x)=0$ 得到 $\sin x+\sin x\cos x=0$,$\therefore\sin x=0$ 或 $1+\cos x=0$,

$\therefore x=k\pi$,或 $x=\pi+k\pi,k\in Z$,

$\therefore$函数 $f(x)$在$[0,2\pi]$上有三个零点 0，π，2π，*B* 正确；

$\because f'(x)=\cos x+\cos 2x$,$\therefore$当 $x=\frac{\pi}{3}$ 时，$f'(x)=0$,

且当 $0<x<\frac{\pi}{3}$ 时 $f'(x)>0$,当 $\frac{\pi}{3}<x<\pi$ 时，$f'(x)<0$,

$\therefore f(x)$在 $x=\frac{\pi}{3}$ 时取得最大值，$f(\frac{\pi}{3})=\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$,*C* 正确，

由上述求解知函数在$[\frac{\pi}{3},\pi]$上一定递减，*D* 错误.

故选 ABC.

三、填空题（本大题共 4 小题，共 20.0 分）

13. 已知函数 $f(x)=x(x-c)^2$ 在 $x=2$ 处有极小值，则实数 c 的值为_____.

【答案】2

【解析】

【分析】

本题考查利用导数研究函数的极值问题，属于中档题.

先求导数，$f(x)=3x^2-4cx+c^2$,令 $f(2)=0$,解得 $c=2$ 或 6，检验 $c=6$ 时，不成立.

【解答】

解：因为 $f(x)=3x^2-4cx+c^2$,

令 $f(2)=0$,即 $12-8c+c^2=0$

解得 $c=2$ 或 6,

当 $c=6$ 时，$f'(x)=3x^2-24x+36=3(x-2)(x-6)$,

故 $x<2$,$f(x)>0$,当 $2<x<6$，$f(x)<0$,

故 $x=2$ 时，函数取极大值，不符合题意.

综上 $c=2$.

故答案为 2.

14. 已知 P（1，m）为角 α 终边上一点，且$tan(\alpha-\frac{\pi}{4})=\frac{1}{3}$，则 cos2α=______.

【答案】$-\frac{3}{5}$

【解析】解：∵P（1，m）为角 α 终边上一点，

∴tanα=m，

再根据$tan(\alpha-\frac{\pi}{4})=\frac{1}{3}=\frac{tan\alpha-1}{1+tan\alpha}=\frac{m-1}{1+m}$,

∴$m=2$，

∴$x=1$，$y=2$，$r=|OP|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，

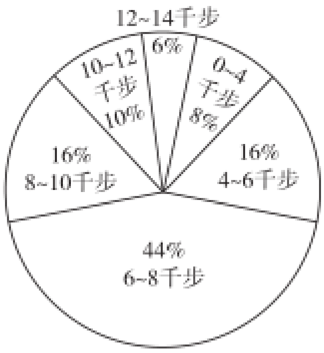
则 $\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{1}{\sqrt{5}}$，$\cos2\alpha=2\cos^2-1=2\times(\frac{1}{\sqrt{5}})^2-1=-\frac{3}{5}$.

故答案为：$-\frac{3}{5}$.

由题意利用任意角的三角函数的定义，两角差的正切公式，求得 m 的值，可得 cosα 的值，进而根据二倍角的余弦函数公式即可求解.

本题主要考查任意角的三角函数的定义，两角和的正切公式二，倍角的余弦函数公式在三角函数化简求值中的应用，属于基础题.

15. 习近平总书记在党的十九大工作报告中提出，永远把人民对美好生活的向往作为奋斗目标．在这一号召的引领下，全国人民积极工作，健康生活当前，“日行万步”正成为健康生活的代名词. 某学校工会积极组织该校教职工参与“日行万步”活动，并随机抽取了该校 100 名教职工，统计他们的日行步数，按步数分组，得到如下饼图：



各段日行步数人数比例

若从日行步数超过 10 千步的教职工中随机抽取两人，则这两人的日行步数恰好一人在 10~12 千步，另一人在 12~14 千步的概率是________；设抽出的这两名教职工中日行步数超过 12 千步的人数为随机变量X，则$E(X)=$________.

【答案】$\frac{1}{2}$；$\frac{3}{4}$.

【解析】

【分析】

本题主要考查古典概型概率计算，超几何分布分布列及其期望计算，考查学生数据处理与计算能力，考查学生数学应用意识，属于中档题.

利用饼图得到在 10-12 千步的人数为 10 人，12-14 千步人数为 6 人，利用古典概型及超几何分布计算随机变量X为 0,1,2 时对应概率，计算期望即可得到答案.

【解答】

解：由题意得日行步数超过 10 千步的教职工人数为$100\times(10\%+6\%)=16$人，其中在 10-12 千步的人数为 10 人，12-14 千步人数为 6 人；

所以利用古典概型可得日行步数恰好一人在 10~12 千步，另一人在 12~14 千步的概率是

$P=\frac{C_{10}^1C_6^1}{C_{16}^2}=\frac{60}{120}=\frac{1}{2}$;

设抽出的这两名教职工中日行步数超过 12 千步的人数为随机变量X，则 X 为 0,1,2；

所以$P(X=0)=\frac{C_{10}^2}{C_{16}^2}=\frac{3}{8}$,$P(X=1)=\frac{C_{10}^1C_6^1}{C_{16}^2}=\frac{1}{2}$,$P(X=2)=\frac{C_6^2}{C_{16}^2}=\frac{1}{8}$,

所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$

所以$E(X)=0\times\frac{3}{8}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{8}=\frac{3}{4}$;

故答案为$\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4}$.

16. 已知函数$f(x)=\frac{x}{|\ln x|}$，若关于 x 的方程 $f^2(x)-(m+3)f(x)+3m=0$ 恰有 3 个不相等的实数根，则实数 m 的取值范围是________.

【答案】$(-\infty，0]\cup\{3\}$

【解析】

【分析】

本题考查了利用导数求解函数的单调性和极值，考查复合函数的零点，属于中档题.

利用导数画出函数的图象，数形结合即可得解.

【解答】

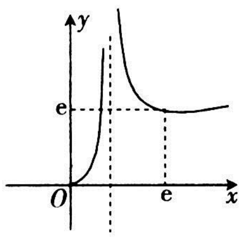
解：当 $x>1$ 时，$f(x)=\frac{x}{\ln x}$，$f'(x)=\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$,

∴$f(x)$在$(1，e)$上单调递减，在$(e，+\infty)$上单调递增，

∴当 $x=e$ 时，$f(x)$取得极小值 $f(e)=e$，

同理可得 $f(x)$在$(0，1)$上单调递增，

作出 $f(x)$的函数图象如图所示，



由 $f^2(x)-(m+3)f(x)+3m=0$，解得 $f(x)=m$，$f(x)=3$.

当 $f(x)=3$ 时，由图象可知方程的解有三个，

故当 $f(x)=m$ 时无解，此时 $m\le0$.

所以 $m\le 0$ 或 $m=3$．

故答案为$(-\infty，0]\cup\{3\}$．

四、解答题（本大题共 6 小题，共 70.0 分）

17．已知 $P=\{x|x^2-8x-20\le 0\}$，$S=\{x|1-m\le x\le 1+m\}$．

(1)是否存在实数 m，使 $x\in P$ 是 $x\in S$ 的充要条件，若存在，求出 m 的取值范围；

(2)是否存在实数 m，使 $x\in P$ 是 $x\in S$ 的必要条件，若存在，求出 m 的取值范围．

【答案】解：由 $x^2-8x-20\le 0$，得 $-2\le x\le 10$，$\therefore P=\{x|-2\le x\le 10\}$．

(1)$\because x\in P$ 是 $x\in S$ 的充要条件，$\therefore P=S$，有$\begin{cases}1-m=-2,\\1+m=10,\end{cases}$得$\begin{cases}m=3,\\m=9,\end{cases}$这样的 m 不存在．

(2)$\because x\in P$ 是 $x\in S$ 的必要条件，$\therefore S\subseteq P$，有$\begin{cases}1-m\ge -2,\\1+m\le 10,\end{cases}$得 $m\le 3$，即 m 的取值范围

是$(-\infty，3]$．

【解析】本题考查的判断充要条件的方法，元素与集合的关系及一元二次不等式的解法，考查了推理能力与计算能力，属于中档题．

（1）由于 $x\in P$ 是 $x\in S$ 的充要条件，则集合 P 与集合 S 相等；

（2）由于 $x\in P$ 是 $x\in S$ 的必要条件，则 $S\subseteq P$．再结合集合关系求出实数 m 即可．

18．已知$\sin\alpha=\frac{\sqrt{10}}{2}\sin(\alpha+\beta),\sin\beta=\frac{\sqrt{10}}{10},\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$．

（Ⅰ）求$\cos 2\beta$；

（Ⅱ）求$\tan(\alpha+\beta)$的值．

【答案】解：（Ⅰ）由 $\cos 2\beta=1-2\sin^2\beta=1-2\times\left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right)^2=\frac{4}{5}$.

（Ⅱ）$\sin\beta=\frac{\sqrt{10}}{10}$,$\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,$\therefore\cos\beta=\frac{3\sqrt{10}}{10}$,

由 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{10}}{2}\sin(\alpha+\beta)$得

$\sin[(\alpha+\beta)-\beta]=\frac{\sqrt{10}}{2}\sin(\alpha+\beta)$,

$\therefore\sin(\alpha+\beta)\times\frac{3\sqrt{10}}{10}-\cos(\alpha+\beta)\times\frac{\sqrt{10}}{10}=\frac{\sqrt{10}}{2}\sin(\alpha+\beta)$,

$\therefore \frac{\sqrt{10}}{5}\sin(\alpha+\beta)=-\frac{\sqrt{10}}{10}\cos(\alpha+\beta)$,

$\therefore \tan(\alpha+\beta)=-2$

【解析】本题主要考查了二倍角公式、同角三角函数基本关系式、两角和与差的三角函数，属于中档题.

（Ⅰ）由二倍角的余弦公式直接求解即可；

（Ⅱ）先用同角三角函数基本关系式求出 $\cos\beta$,再用差角的正弦公式展开 $\sin\alpha=\sin[(\alpha+\beta)-\beta]$,最后利用同角三角函数基本关系式求得结果.

19. 已知ΔABC的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,若 $a=4$,___________，求ΔABC的周长 L 和面积 S.

(1)$\cos A=\frac{3}{5},\cos C=\frac{\sqrt{5}}{5}$

(2)$c\sin C=\sin A+b\sin B,B=60^{\circ}$

(3)$c=2,\cos A=-\frac{1}{4}$

这三个条件中,任选一个补充在上面问题中的横线处,并加以解答。

注:如果选择多个条件分别解答,按第一个解答计分。

【答案】解：选择①

$\because \cos A=\frac{3}{5},\cos C=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$0<A<\pi$，$0<B<\pi$

$\therefore \sin A=\frac{4}{5}$，$\sin C=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

在$\triangle ABC$ 中，$A+B+C=\pi$，即 $B=\pi-(A+C)$

$\therefore \sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C$

$=\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{5}}{5}+\frac{3}{5}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,

由正弦定理得，$b=\frac{a\sin B}{\sin A}$

$=\frac{4\times\frac{2\sqrt{5}}{5}}{\frac{4}{5}}=2\sqrt{5}$，

$\because \sin B=\sin C$

$\therefore b=c=2\sqrt{5}$

$\therefore \triangle ABC$ 的周长 $L=4+2\sqrt{5}+2\sqrt{5}=4+4\sqrt{5}$，

$\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}ab\cdot\sin C=\frac{1}{2}\times4\times2\sqrt{5}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=8$.

选择②：$c\sin C=\sin A+b\sin B$，$B=60°$，$a=4$.

由正弦定理可得：$c^2=a+b^2$，$\therefore c^2=4+b^2$.

由余弦定理可得：$b^2=16+c^2-8c\cos60°$，化为：$b^2=16+c^2-4c$．

联立解得：$c=5$，$b=\sqrt{21}$．

∴△ABC 的周长 $L=4+5+\sqrt{21}$

$=9+\sqrt{21}$．

△ABC 的面积 $S=\frac{1}{2}ac\bullet\sin B=\frac{1}{2}\times4\times5\times\sin60°=5\sqrt{3}$．

选择③$\because c=2,\cos A=-\frac{1}{4}$

∴由余弦定理得，$16=b^2+4+2\times b\times2\times\frac{1}{4}$

即 $b^2+b-12=0$

解得 $b=3$ 或 $b=-4$（舍去），

∴△ABC 的周长 $L=4+3+2=9$，

$\because A\in$（0，π）

$\therefore\sin A=\sqrt{1-\cos^2A}=\frac{\sqrt{15}}{4}$

∴△ABC 的面积 $S=\frac{1}{2}bc\bullet\sin A=\frac{1}{2}\times3\times2\times\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{3\sqrt{15}}{4}$．

故选择①△ABC 的周长为 $4+4\sqrt{5}$，△ABC 的面积为 8；

故选择②△ABC 的周长为 $9+\sqrt{21}$，△ABC 的面积为 $5\sqrt{3}$；

故选择③△ABC 的周长为 9，△ABC 的面积为$\frac{3\sqrt{15}}{4}$.

【解析】本题考查了正弦定理、余弦定理、三角形面积计算公式，考查了推理能力与计算能力，属于中档题．

选择①先根据同角三角函数的关系求出$\sin A=\frac{4}{5}$，$\sin C=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，再根据两角和的正弦公式求出 sin（$A+C$），即 $\sin B$，再利用正弦定理求出 b，从而求出周长，根据面积公式求出面积即可；

选择②根据已知条件，由正弦定理可得：$c^2=a+b^2$．由余弦定理可得：$b^2=16+c^2-8c\cos60°$，化为：$b^2=16+c^2-4c$，联立解得：c，b．即可得出．

选择③，由余弦定理求出 b，从而求出周长，再求出 $\sin A$，即可求出面积.

20．设函数$f(x)=|x-1|,x\in R$

(1)求不等式$f(x)<3-f(x-1)$的解集；

(2)已知关于 x 的不等式 $f(x)\le f(x+1)-|x-a|$的解集为 M，若$\left(1,\frac{3}{2}\right)\subseteq M$，求实数 a 的取值范围.

【答案】解：(1)因为$f(x)<3-f(x-1)$，所以$|x-1|<3-|x-2|\Leftrightarrow|x-1|+|x-2|<3$，

$\Leftrightarrow\begin{cases}x<1\\3-2x<3\end{cases}$或$\begin{cases}1\leqslant x\leqslant 2\\1<3\end{cases}$或$\begin{cases}x>2\\2x-3<3\end{cases}$

解得 $0\le x<1$ 或 $1\le x\le 2$ 或 $2<x\le 3$，

故不等式$f(x)<3-f(x-1)$的解集为$(0,3)$.

(2)因为$\left(1,\frac{3}{2}\right)\subseteq M$，所以当 $x\in\left(1,\frac{3}{2}\right)$时，$f(x)\le f(x+1)-|x-a|$恒成立，

而 $f(x)\le f(x+1)-|x-a|\Leftrightarrow|x-1|-|x|+|x-a|\le 0\Leftrightarrow|x-a|\le|x|-|x-1|$，

因为 $x\in\left(1,\frac{3}{2}\right)$，所以$|x-a|\le 1$，即 $x-1\le a\le x+1$，

由题意，知 $x-1\le a\le x+1$ 对于任意的 $x\in\left(1,\frac{3}{2}\right)$恒成立，所以$\frac{1}{2}\le a\le 2$，

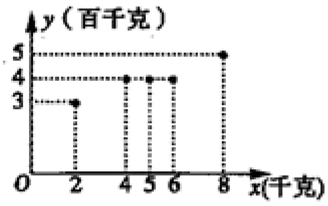
故实数 a 的取值范围为$\left[\frac{1}{2},2\right]$.

【解析】本题考查了不等式和绝对值不等式，不等式的恒成立问题以及不等式求解，属于中档题．

（1）根据条件得到$|x-1|+|x-2|<3$，从而得到解集；

（2）把问题转化为不等式恒成立问题即可求出 a 的取值范围.

21. 根据统计，某蔬菜基地西红柿亩产量的增加量y（百千克）与某种液体肥料每亩使用量x（千克）之间的对应数据的散点图，如图所示.



（1）依据数据的散点图可以看出，可用线性回归模型拟合y与x的关系，请计算相关系数 r 并加以说明(若$|r|>0.75$,则线性相关程度很高,可用线性回归模型拟合)；

（2）求y关于x的回归方程，并预测液体肥料每亩使用量为 12 千克时，西红柿亩产量的增加量y约为多少？

附：相关系数公式$r=-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{xy}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i{}^2-n\overline{x}^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i{}^2-n\overline{y}^2}}$，参考数据：$\sqrt{0.3}\approx 0.55,\sqrt{0.9}\approx 0.95$.

回归方程$\hat{y}=\hat{b}\,x+\hat{a}$中斜率和截距的最小二乘估计公式分别为：$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{xy}}{\sum_{i=1}^{n}x_i{}^2-n\overline{x}^2},\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\,\overline{x}$.

【答案】解：（1）由已知数据可得：

$\overline{x}=\frac{2+4+5+6+8}{5}=5$，

$\overline{y}=\frac{3+4+4+4+5}{5}=4$，

所以$\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})$

$=(-3)\times(-1)+(-1)\times 0+0\times 0+1\times 0+3\times 1=6$，

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})^2}$$

$=\sqrt{(-3)^2+(-1)^2+0^2+1^2+3^2}=2\sqrt{5}$，

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{5}(y_i-\overline{y})^2}$$

$=\sqrt{(-1)^2+0^2+0^2+0^2+1^2}=\sqrt{2}$，

所以相关系数$r=\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{5}(y_i-\overline{y})^2}}$

$=\frac{6}{2\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{9}{10}}\approx 0.95$，

因为$r>0.75$，

所以可用线性回归模型拟合y与x的关系；

（2）b^ $=\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})^2}=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}=0.3$，

那么$\hat{a}=4-5\times 0.3=2.5$，

所以回归方程为$\hat{y}=0.3x+2.5$，

当$x=12$时，$\hat{y}=0.3\times 12+2.5=6.1$，

即当液体肥料每亩使用量为 12 千克时，西红柿亩产量的增加量约为 6.1 百千克.

【解析】本题考查了平均数的计算，相关关系的判定，考查线性回归方程的求法，独立性检验，考查计算能力，属于中档题.

（1）由已知表格中的数据求得平均数，得到相关系数，结合 $r>0.75$，可得可用线性回

归模型拟合 y 与 x 的关系；

（2）求出$\hat{b}$与$\hat{a}$的值，得到线性回归方程，取 x=12 求得 y 值即可.

22. 已知 f（x）$=xe^{ax+1}$（$a\in R$）.

（1）曲线 $y=f$（x）在点（1，f（1））处的切线与 x 轴平行，求 a 的值；

（2）若 g（x）$=f$（x）$-\ln f$（x）$+1$，存在正实数 x_1，x_2，满足 $x_1\neq x_2$ 且 g（x_1）$=g$（x_2）$=2$，求 a 的取值范围.

【答案】解：（1）$f'(x)=(ax+1)e^{ax+1}$，

$\because$曲线$y=f(x)$在点$(1,\ f(1))$处的切线与x轴平行，

$\therefore f'(1)=(a+1)e^{a+1}=0$，$\therefore a=-1$，

此时 $f(x)=xe^{-x+1}$，$\therefore f(1)=1\neq 0$，

满足曲线$y=f(x)$在点$(1,\ f(1))$处的切线与x轴平行，

故$a=-1$.

（2）$f(x)=xe^{ax+1}>0$，故$x>0$，

令$t=xe^{ax+1}(x>0)$，则$g(x)=t-\ln t+1$.

令$h(t)=t-\ln t+1$，则$h'(t)=1-\frac{1}{t}=\frac{t-1}{t}$.

当$t\in(0,\ 1)$时，$h'(t)<0$，$h(t)$单调递减；

当$t\in(1,\ +\infty)$时，$h'(t)>0$，$h(t)$单调递增，

$\therefore h(t)_{\min}=h(1)=2$.

$\because$存在正实数x_1，x_2，满足$x_1\neq x_2$且$g(x_1)=g(x_2)=2$，

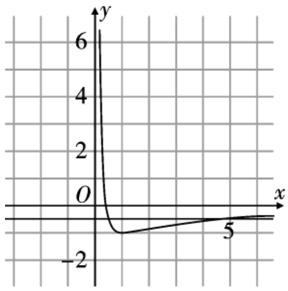
$\therefore t=xe^{ax+1}=1(x>0)$有至少两解，即$a=\dfrac{-\ln x-1}{x}$，

令$\varphi(x)=\dfrac{-\ln x-1}{x}$，则$\varphi'(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$，

当$x\in(0,\ 1)$，$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$单调递减；

当$x\in(1,\ +\infty)$，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$单调递增；

如图 3，$\varphi(x)_{\min}=\varphi(1)=-1$，



又当$x \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$时，$\varphi(x) > 0$；当$x \in \left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$时，$\varphi(x) < 0$,

$\therefore a \in (-1, 0)$.

【解析】本题考查导数的几何意义以及利用导数研究函数的单调性，零点问题，属于较难题.

(1)根据导数的几何意义可得$f'(1) = (a+1)e^{a+1} = 0$, $\therefore a = -1$,

（2）由题意可得$f(x) = xe^{ax+1} > 0$,故$x > 0$, 令$t = xe^{ax+1}(x > 0)$, 令$h(t) = t - \ln t + 1$,

$h(t)_{\min} = h(1) = 2$. 存在正实数x_1, x_2, 满足$x_1 \neq x_2$且$g(x_1) = g(x_2) = 2$,

$t = xe^{ax+1} = 1(x > 0)$有至少两解，即$a = \dfrac{-\ln x - 1}{x}$, 构造函数$\varphi(x) = \dfrac{-\ln x - 1}{x}$, 结合函数图像即可求解.