

三角函数填空题

一、基础题:

1. [2010 全国大纲 I (理) T14] 已知 α 为第三象限的角, $\cos 2\alpha = -\frac{3}{5}$, 则 $\tan(\frac{\pi}{4} + 2\alpha) =$
 $-\frac{1}{7}$.

【解答】解: 方法一: 因为 α 为第三象限的角, 所以 $2\alpha \in (2(2k+1)\pi, \pi + 2(2k+1)\pi) (k \in \mathbb{Z})$,

又 $\cos 2\alpha = -\frac{3}{5} < 0$, 所以 $2\alpha \in (\frac{\pi}{2} + 2(2k+1)\pi, \pi + 2(2k+1)\pi) (k \in \mathbb{Z})$,

于是有 $\sin 2\alpha = \frac{4}{5}$, $\tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = -\frac{4}{3}$,

$$\text{所以 } \tan(\frac{\pi}{4} + 2\alpha) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan 2\alpha}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \tan 2\alpha} = \frac{1 - \frac{4}{3}}{1 + \frac{4}{3}} = -\frac{1}{7}.$$

方法二: α 为第三象限的角, $\cos 2\alpha = -\frac{3}{5}$,

$2k\pi + \pi < \alpha < 2k\pi + \frac{3}{2}\pi \Rightarrow 4k\pi + 2\pi < 2\alpha < 4k\pi + 3\pi \Rightarrow 2\alpha$ 在第二象限,

$$\sin 2\alpha = \frac{4}{5} \tan(\frac{\pi}{4} + 2\alpha) = \frac{\sin(\frac{\pi}{4} + 2\alpha)}{\cos(\frac{\pi}{4} + 2\alpha)} = \frac{\sin \frac{\pi}{4} \cos 2\alpha + \cos \frac{\pi}{4} \sin 2\alpha}{\cos \frac{\pi}{4} \cos 2\alpha - \sin \frac{\pi}{4} \sin 2\alpha} = \frac{\cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha - \sin 2\alpha} = -\frac{1}{7}$$

2. [2010 全国大纲 II (理) T13] 已知 a 是第二象限的角, $\tan(\pi + 2a) = -\frac{4}{3}$, 则 $\alpha = -\frac{1}{2}$.

【解答】解: 由 $\tan(\pi + 2a) = -\frac{4}{3}$ 得 $\tan 2a = -\frac{4}{3}$, 又 $\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a} = -\frac{4}{3}$,

解得 $\tan a = -\frac{1}{2}$ 或 $\tan a = 2$, 又 a 是第二象限的角, 所以 $\tan a = -\frac{1}{2}$. 故答案: $-\frac{1}{2}$.

3. [2010 全国大纲版 I 卷 (文) T14] 已知 α 为第二象限角, $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, 则 $\alpha = -\frac{24}{7}$.

【解答】解: $\because \alpha$ 为第二象限角, 且 $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\therefore \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - (\frac{3}{5})^2} = -\frac{4}{5}$,

则 $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{3}{4}$. $\therefore \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \times (-\frac{3}{4})}{1 - (-\frac{3}{4})^2} = -\frac{24}{7}$. 故答案为: $-\frac{24}{7}$.

4. [2010 全国大纲版 II 卷 (文) T13] 已知 α 是第二象限的角, $\tan \alpha = -\frac{1}{2}$, 则 $\cos \alpha =$
 $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

【解答】解：∵ $\tan \alpha = -\frac{1}{2} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ ，∴ $2\sin \alpha = -\cos \alpha$

又∵ $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ， α 是第二象限的角∴ $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 故答案为： $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

5. [2011 全国大纲（理）T14] 已知 $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ ， $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ，则 $\tan 2\alpha = -\frac{4}{3}$ 。

【解答】解：由 $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ ， $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ，得 $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ， $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{1}{2}$

∴ $\tan 2\alpha = \frac{2\tan \alpha}{1-\tan^2 \alpha} = -\frac{4}{3}$ ，故答案为： $-\frac{4}{3}$

6. [2011 全国大纲（文）T14] 已知 $\alpha \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$ ， $\tan \alpha = 2$ ，则 $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ 。

【解答】解：∵ $\alpha \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$ ，∴ $\cos \alpha < 0$ ∴ $\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 \alpha}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ ，故答案为： $-\frac{\sqrt{5}}{5}$

7. [2011 全国新课标（文）T15] $\triangle ABC$ 中， $\angle B = 120^\circ$ ， $AC = 7$ ， $AB = 5$ ，则 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{15\sqrt{3}}{4}$ 。

【解答】解：由余弦定理可知 $\cos B = \frac{25+BC^2-49}{2 \cdot BC \cdot 5} = -\frac{1}{2}$ ，求得 $BC = -8$ 或 3 （舍负）

∴ $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin B = \frac{1}{2} \times 5 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$ ，故答案为： $\frac{15\sqrt{3}}{4}$

8. [2013 全国大纲卷(理)-T13] 已知 α 是第三象限角， $\sin \alpha = -\frac{1}{3}$ ，则 $\cot \alpha = 2\sqrt{2}$ 。

【解答】解：由 α 是第三象限的角，得到 $\cos \alpha < 0$ ，

又 $\sin \alpha = -\frac{1}{3}$ ，所以 $\cos \alpha = -\sqrt{1-(-\frac{1}{3})^2} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

则 $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 2\sqrt{2}$

故答案为： $2\sqrt{2}$

9. [2013 全国新课标 I 卷(理)-T15] 设当 $x = \theta$ 时，函数 $f(x) = \sin x - 2\cos x$ 取得最大值，则 $\cos \theta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 。

【解答】解：方法一： $f(x) = \sin x - 2\cos x = \sqrt{5}(\frac{\sqrt{5}}{5}\sin x - \frac{2\sqrt{5}}{5}\cos x) = \sqrt{5}\sin(x-\alpha)$ （其中

$\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ， $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ），

∵ $x = \theta$ 时，函数 $f(x)$ 取得最大值，

∴ $\sin(\theta - \alpha) = 1$ ，即 $\sin \theta - 2\cos \theta = \sqrt{5}$ ，

又 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ ，

联立得 $(2\cos\theta + \sqrt{5})^2 + \cos^2\theta = 1$, 解得 $\cos\theta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

方法二: $f(x) = \sin x - 2\cos x = \sqrt{5}\sin(x+\varphi)$ (其中 $\tan\varphi = -2$, $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$),

因为当 $x = \theta$ 时, $f(x)$ 取得最大值, 所以 $\theta + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$,

所以 $\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - \varphi (k \in \mathbb{Z})$,

所以 $\cos\theta = \cos(\frac{\pi}{2} + 2k\pi - \varphi) = \sin\varphi = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

故答案为: $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

10. [2013 全国新课标 II 卷(理)-T15] 设 θ 为第二象限角, 若 $\tan(\theta + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$, 则 $\sin\theta + \cos\theta =$
 $-\frac{\sqrt{10}}{5}$.

【解答】解: $\because \tan(\theta + \frac{\pi}{4}) = \frac{\tan\theta + 1}{1 - \tan\theta} = \frac{1}{2}$,

$\therefore \tan\theta = -\frac{1}{3}$,

而 $\cos^2\theta = \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta + \cos^2\theta} = \frac{1}{1 + \tan^2\theta}$,

$\because \theta$ 为第二象限角,

$\therefore \cos\theta = -\sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2\theta}} = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \frac{\sqrt{10}}{10}$,

则 $\sin\theta + \cos\theta = \frac{\sqrt{10}}{10} - \frac{3\sqrt{10}}{10} = -\frac{\sqrt{10}}{5}$.

故答案为: $-\frac{\sqrt{10}}{5}$

11. [2013 全国新课标 I 卷(文)-T16(理)-T15] 设当 $x = \theta$ 时, 函数 $f(x) = \sin x - 2\cos x$ 取得最大值, 则 $\cos\theta =$ $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

【解答】解: 方法一: $f(x) = \sin x - 2\cos x = \sqrt{5}(\frac{\sqrt{5}}{5}\sin x - \frac{2\sqrt{5}}{5}\cos x) = \sqrt{5}\sin(x - \alpha)$ (其中

$\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$),

$\because x = \theta$ 时, 函数 $f(x)$ 取得最大值,

$\therefore \sin(\theta - \alpha) = 1$, 即 $\sin\theta - 2\cos\theta = \sqrt{5}$,

又 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$,

联立得 $(2\cos\theta + \sqrt{5})^2 + \cos^2\theta = 1$, 解得 $\cos\theta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

方法二: $f(x) = \sin x - 2\cos x = \sqrt{5}\sin(x + \varphi)$ (其中 $\tan\varphi = -2$, $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$),

因为当 $x = \theta$ 时, $f(x)$ 取得最大值, 所以 $\theta + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$,

所以 $\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - \varphi (k \in \mathbb{Z})$,

所以 $\cos \theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi - \varphi\right) = \sin \varphi = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

故答案为: $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

12. [2013 全国新课标 II 卷(文)-T16] 函数 $y = \cos(2x + \varphi)$ ($-\pi, \varphi < \pi$) 的图象向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位后, 与函数 $y = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$ 的图象重合, 则 $\varphi = \underline{\underline{\frac{5\pi}{6}}}$.

【解答】解: 函数 $y = \cos(2x + \varphi)$ ($-\pi, \varphi < \pi$) 的图象向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位后, 得平移后的图象的函数解析式为

$$y = \cos\left[2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \varphi\right] = \cos(2x + \varphi - \pi),$$

而函数 $y = \sin(2x + \frac{\pi}{3}) = \cos(2x + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2})$,

由函数 $y = \cos(2x + \varphi)$ ($-\pi, \varphi < \pi$) 的图象向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位后, 与函数 $y = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$ 的图象重合, 得

$$2x + \varphi - \pi = 2x + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}, \text{ 解得: } \varphi = \frac{5\pi}{6}.$$

符合 $-\pi, \varphi < \pi$.

故答案为 $\frac{5\pi}{6}$.

13. [2014 全国大纲卷(文)-T14] 函数 $y = \cos 2x + 2\sin x$ 的最大值是 $\underline{\underline{\frac{3}{2}}}$.

【解答】解: $\because y = \cos 2x + 2\sin x = 1 - 2\sin^2 x + 2\sin x = -2\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}$

又 $\because -1 \leq \sin x \leq 1$

当 $\sin x = \frac{1}{2}$ 时, 函数有最大值 $\frac{3}{2}$

故答案为: $\frac{3}{2}$

14. [2014 全国新课标 I 卷(文)-T02] 若 $\tan \alpha > 0$, 则()

A. $\sin \alpha > 0$

B. $\cos \alpha > 0$

C. $\sin 2\alpha > 0$

D. $\cos 2\alpha > 0$

【分析】化切为弦, 然后利用二倍角的正弦得答案.

【解答】解: $\because \tan \alpha > 0$,

$$\therefore \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} > 0,$$

则 $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha > 0$.

故选: C.

15. [2014 全国新课标 I 卷(文)-T07] 在函数① $y = \cos |2x|$, ② $y = |\cos x|$, ③ $y = \cos(2x + \frac{\pi}{6})$,

④ $y = \tan(2x - \frac{\pi}{4})$ 中, 最小正周期为 π 的所有函数为()

A. ①②③

B. ①③④

C. ②④

D. ①③

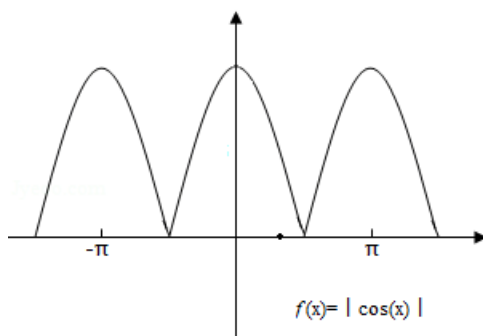
【解答】解: $\because$ 函数① $y = \cos |2x| = \cos 2x$, 它的最小正周期为 $\frac{2\pi}{2} = \pi$,

② $y = |\cos x|$ 的最小正周期为 $\frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{1} = \pi$,

③ $y = \cos(2x + \frac{\pi}{6})$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{2} = \pi$,

④ $y = \tan(2x - \frac{\pi}{4})$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$,

故选: A.



16. [2014·全国新课标 II 卷(文)-T14] 函数 $f(x) = \sin(x + \varphi) - 2\sin \varphi \cos x$ 的最大值为 1.

【解答】解: 函数 $f(x) = \sin(x + \varphi) - 2\sin \varphi \cos x$

$$= \sin x \cos \varphi + \sin \varphi \cos x - 2\sin \varphi \cos x$$

$$= \sin x \cos \varphi - \sin \varphi \cos x$$

$$= \sin(x - \varphi), 1.$$

所以函数的最大值为 1.

故答案为: 1.

17. [2016·全国 I 卷(理)-T13] 设向量 $\vec{a} = (m, 1)$, $\vec{b} = (1, 2)$, 且 $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$, 则 $m =$

-2.

【解答】解: $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$, 可得 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. 向量 $\vec{a} = (m, 1)$, $\vec{b} = (1, 2)$,

可得 $m + 2 = 0$, 解得 $m = -2$. 故答案为: -2.

18. [2016·全国 I 卷(文)-T13] 设向量 $\vec{a} = (x, x+1)$, $\vec{b} = (1, 2)$, 且 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则 $x = \underline{-\frac{2}{3}}$.

【解答】解: $\because \vec{a} \perp \vec{b}; \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$;

$$\text{即 } x + 2(x+1) = 0; \therefore x = -\frac{2}{3}.$$

故答案为: $-\frac{2}{3}$.

19. [2016·全国 II 卷(文)-T13] 已知向量 $\vec{a} = (m, 4)$, $\vec{b} = (3, -2)$, 且 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 则 $m = \underline{-6}$.

【解答】解: 向量 $\vec{a} = (m, 4)$, $\vec{b} = (3, -2)$, 且 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 可得 $12 = -2m$, 解得 $m = -6$.

故答案为: -6.

20. [2016·全国 III 卷(文)-T14] 函数 $y = \sin x - \sqrt{3} \cos x$ 的图象可由函数 $y = 2 \sin x$ 的图象至少向

右平移 $\underline{\frac{\pi}{3}}$ 个单位长度得到.

【解答】解： $\because y = \sin x - \sqrt{3} \cos x = 2 \sin(x - \frac{\pi}{3})$ ，

令 $f(x) = 2 \sin x$ ，则 $f(x - \varphi) = 2 \sin(x - \varphi) (\varphi > 0)$ ，

依题意可得 $2 \sin(x - \varphi) = 2 \sin(x - \frac{\pi}{3})$ ，

故 $-\varphi = 2k\pi - \frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$ ，即 $\varphi = -2k\pi + \frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$ ，

当 $k = 0$ 时，正数 $\varphi_{\min} = \frac{\pi}{3}$ ，

故答案为： $\frac{\pi}{3}$ 。