江苏省仪征中学 2019 届高三年级第一学期 12 月份冲刺联考热身训练（4）

班级__________姓名__________学号__________日期__________

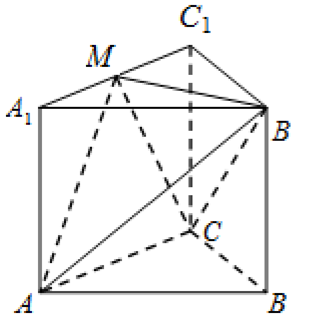
一、填空题：

1．命题“$\exists x>1, x^2+2x-1<0$”的否定是______________.

2．函数 $y=\dfrac{1}{x^2+2}$的值域为__________.

3．若“$x<m$”是“$\dfrac{x-2018}{x-2019}>0$”的充分不必要条件, 则实数 m 的最大值为_________.

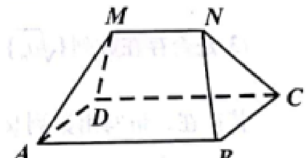
4. 抛掷甲、乙两枚质地均匀且四面上分别标有 1，2，3，4 的正四面体，记底面上的数字分别为 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$，则 $\dfrac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}}$ 为整数的概率是_____.



5．如图，在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，若各条棱长均为 2，且 M 为 A_1C_1 的中点，则三棱锥 $M-AB_1C$ 的体积是________.

6. 已知二次函数 $f(x)=ax^2-4x+c$ 的值域是 $[0,+\infty)$，则 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{9}{c}$ 的最小值是_________.

7．若一个圆锥的侧面展开图为圆心角为 120°、半径为 3 的扇形，则这个圆锥的表面积是_____.



(第 8 题)

8．如图所示的几何体是一个五面体，四边形 ABCD 为矩形，AB＝4，BC＝2，且 MN∥AB，MN＝3，△ADM 与△BCN 都是正三角形，则此五面体的体积为_______.

9．$\dfrac{2\cos 55^\circ-\sqrt{3}\sin 5^\circ}{\cos 5^\circ}$ 的值为_________.

10．在 $\mathrm{Rt}\Delta ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$AC=4, BC=2$，D 是 BC 的中点，　E 是 AB 的中点，P 是 ΔABC（包括边界）内任一点．则 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{EP}$ 的取值范围是__________.

11．已知双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$ 的左、右顶点为 A、B，焦点在 y 轴上的椭圆以 A、B 为顶点，且离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，过 A 作斜率为 k 的直线 l 交双曲线于另一点 M，交椭圆于另一点 N，若 $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{NM}$，则 k 的值为______.

12．已知三棱锥 $S-ABC$ 的所有顶点都在球 O 的球面上，△ABC 是边长为 1 的正三角形，SC 为球 O 的直径，且 SC＝2，则此棱锥的体积为______________.

二、解答题：

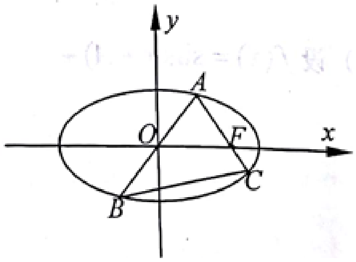
1. 设函数 $f(x)=\sin(2x+\varphi)\ (-\pi<\varphi<0)$. $y=f(x)$ 图像的一条对称轴是直线 $x=\dfrac{\pi}{8}$.

（1）求函数 $f(x)$ 的解析式;（2）若 $f(\dfrac{\alpha}{2})=\dfrac{3}{5},\alpha\in(0,\pi)$，试求 $f(\alpha+\dfrac{5\pi}{8})$ 的值.

2. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 F(c，0)，O 为坐标原点，若椭圆上存在一点 A，使 OA⊥AF，延长 AO，AF 分别交椭圆于 B，C.

（1）求椭圆 C 离心率的最小值;

（2）当椭圆 C 的离心率取最小值时，求直线 BC 的斜率.

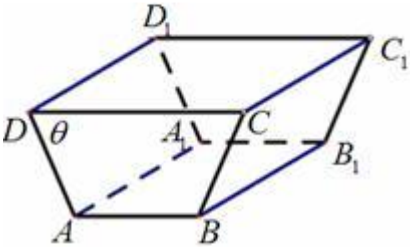


3. 某农户准备建一个水平放置的直四棱柱形储水器（如图），其中直四棱柱的高 $AA_1=10m$，两底

面 $ABCD, A_1B_1C_1D_1$ 是高为 $2m$，面积为 $10m^2$ 的等腰梯形，且 $\angle ADC=\theta(0<\theta<\frac{\pi}{2})$，若储水窖顶盖每平方米的造价为 100 元，侧面每平方米的造价为 400 元，底部每平方米的造价为 500 元.

(1)试将储水窖的造价 y 表示为 θ 的函数；

(2)该农户如何设计储水窖，才能使得储水窖的造价最低，最低造价是多少元?（取 $\sqrt{3}=1\cdot73$）。



三、附加题：

1. 设矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} a & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$的一个特征值为 2，若曲线 C 在矩阵 $\boldsymbol{M}$ 变换下的方程为 $x^2+y^2=1$，求曲线 C 的方程.

2. 已知曲线 E 的参数方程为$\begin{cases} x=\cos 2\theta-1 \\ y=\sqrt{2}\cos\theta \end{cases}$($\theta$ 为参数)，以坐标原点为极点，$\boldsymbol{x}$ 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系，直线 $\boldsymbol{l}$ 的极坐标方程为$\theta=\dfrac{\pi}{4}$, 求直线 $\boldsymbol{l}$ 与曲线 E 的交点的极坐标。

3. 袋中装有黑球和白球共 7 个，从中任取 2 个球都是白球的概率为$\dfrac{1}{7}$．现有甲、乙两人从袋中轮流、不放回地摸取 1 球，甲先取，乙后取，然后甲再取……直到袋中的球取完即终止．若摸出白球，则记 2 分，若摸出黑球，则记 1 分．每个球在每一次被取出的机会是等可能的．用 ξ 表示甲、乙最终得分差的绝对值．

（1）求袋中原有白球的个数；（2）求随机变量的分布列及期望 $E\xi$.

高三年级第一学期 12 月份冲刺联考热身训练（4）答案

一、填空题：

1．$\forall x>1, x^2+2x-1\geq 0$；2．$\left(0, \frac{1}{2}\right]$；3．2018；4．$\frac{1}{2}$；5．$\frac{2\sqrt{3}}{3}$；6．3；7．$4\pi$；8．$\frac{11\sqrt{11}}{6}$；

9．1；10．$-9,9$；11．$\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$；12．$\frac{\sqrt{2}}{6}$。

二、解答题：

1．解：（1）$\because x=\frac{\pi}{8}$是函数$y=f(x)$的图象的对称轴，

$\therefore \sin(2\times\frac{\pi}{8}+\varphi)=\pm 1$，$\therefore \frac{\pi}{4}+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in Z$，…………………2 分

$\because -\pi<\varphi<0$，$\therefore \varphi=-\frac{3\pi}{4}$，…………………4 分

故 $f(x)=\sin(2x-\frac{3\pi}{4})$ …………………6 分

（2）因为$f(\frac{\alpha}{2})=\frac{3}{5}, \alpha\in(0,\pi)$，

所以$\sin(\alpha-\frac{3\pi}{4})=\frac{3}{5}$，$\cos(\alpha-\frac{3\pi}{4})=\frac{4}{5}$ …………………8 分

故$\sin\alpha=\sin[(\alpha-\frac{3\pi}{4})+\frac{3\pi}{4}]=\sin(\alpha-\frac{3\pi}{4})\cdot\cos\frac{3\pi}{4}+\cos(\alpha-\frac{3\pi}{4})\cdot\sin\frac{3\pi}{4}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{4}{5}-\frac{3}{5})=\frac{\sqrt{2}}{10}$ …………11 分

而 $f(\alpha+\frac{5\pi}{8})=\sin[2(\alpha+\frac{5\pi}{8})-\frac{3\pi}{4}]=\sin(2\alpha+\frac{\pi}{2})=\cos 2\alpha$

$=1-2\sin^2\alpha=1-2(\frac{\sqrt{2}}{10})^2=\frac{24}{25}$.

所以，$f(\alpha+\frac{5\pi}{8})=\frac{24}{25}$. …………14 分

2. 18（1）设 $A(x,y)$

$$(x-\frac{c}{2})^2+y^2=\frac{c^2}{4}$$

$$\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}=1$$

$\frac{c^2}{a^2}x^2-cx+b^2=0$ 在 $(0,c)$ 上有解

$$\begin{cases}\Delta\ge 0\\ 0<\frac{a^2}{2c}<c\\ f(0)>0\\ f(1)>0\end{cases}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\le e<1$$

(2)方程变为 $\frac{3}{4}x^2-cx+\frac{1}{3}c^2=0$

$$x=\frac{2c}{3}$$

$$y_A=\pm\frac{\sqrt{2}}{3}c$$

$$k_{AF}=\pm\sqrt{2}c$$

由点差法知道 $k_{AF}\cdot k_{BC}=-\frac{1}{4}$

$$k_{BC}=\pm\frac{\sqrt{2}}{8}$$

3. （1）过 A 作 $AE\perp DC$，垂足为 E，则 $AE=2$，$DE=\frac{2}{\tan\theta},AD=\frac{2}{\sin\theta}$，令 $AB=x$，从而 $CD=x+\frac{4}{\tan\theta}$，故 $\frac{1}{2}\times 2\times\left(x+x+\frac{4}{\tan\theta}\right)=10$，解得 $x=5-\frac{2}{\tan\theta}$，$CD=5+\frac{2}{\tan\theta}$，

所以 $y=(20+2AD\times 10)\times 400+(10AB)\times 500+(10CD)\times 100$

$$=8000+8000\times\frac{2}{\sin\theta}+5000\times\left(5-\frac{2}{\tan\theta}\right)+1000\left(5+\frac{2}{\tan\theta}\right)$$

$$=38000+8000\left(\frac{2}{\sin\theta}-\frac{1}{\tan\theta}\right)\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

（2）$y=38000+8000\times\frac{2-\cos\theta}{\sin\theta}$，

$$y'=8000\frac{\sin^2\theta-(2-\cos\theta)\cos\theta}{\sin^2\theta}=\frac{8000(1-2\cos\theta)}{\sin^2\theta}$$

令 $y'=0$，则 $\theta=\frac{\pi}{3}$，当 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$ 时，$y'<0$，此时函数 y 单调递减;

当 $\theta\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$y'>0$，此时函数 y 单调递增。所以当 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 时，

$y_{\min}=38000+8000\sqrt{3}=51840$ 。

答：当 $\angle ADC=60^\circ$ 时，等价最低，最低造价为 51840 元。

三、附加题：

1. 由题意，知矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的特征多项式为 $f(\lambda)=(\lambda-a)(\lambda-1)$，因为矩阵 $\boldsymbol{M}$ 有一个特征值为 2，所以 $f(2)=0$，所以 $a=2$.设曲线 C 上任一点的坐标为(x, y)，其在矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的变换下的对应点的坐标为(x', y').

所以 $\boldsymbol{M}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}$，即 $\begin{cases}x'=2x,\\y'=2x+y,\end{cases}$ 因为曲线 C 在矩阵 $\boldsymbol{M}$ 变换下的方程为 $x^2+y^2=1$，

所以$(2x)^2+(2x+y)^2=1$，即曲线 C 的方程为 $8x^2+4xy+y^2=1$.

2. 解：曲线 E 的参数方程化为普通方程为：$x=y^2-2$（$y\in\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$），直线 $\boldsymbol{l}$ 的极坐标方程化为直角坐标方程为 $x=y$，联立得 $x=y=-1$，或 $x=y=2$（舍去），故直线 $\boldsymbol{l}$ 与曲线 E 的交点的直角坐标为（−1，−1），化为极坐标为$\left(\sqrt{2},\dfrac{5\pi}{4}\right)$。

3. 解：（1）设袋中原有个白球，由题意，知 $\dfrac{1}{7}=\dfrac{C_n^2}{C_7^2}=\dfrac{n(n-1)}{7\times6}$，

解之得 $n=3$（负值舍去），即袋中原有 3 个白球．………………3 分

（2）由（1）可知，袋中有 3 个白球、4 个黑球．

甲四次取球可能的情况是：4 个黑球、3 黑 1 白、2 黑 2 白、1 黑 3 白，

相应的分数之和为 4 分、5 分、6 分、7 分；

与之对应的乙取球情况：3 个白球、1 黑 2 白、2 黑 1 白、3 黑，

相应分数之和为 6 分、5 分、4 分、3 分；故 ξ 可能的取值为 0，2，4．

$P(\xi=0)=\dfrac{C_4^3\cdot C_3^1}{C_7^4}=\dfrac{12}{35}$；$P(\xi=2)=\dfrac{C_4^4+C_4^2\cdot C_3^2}{C_7^4}=\dfrac{19}{35}$；$P(\xi=4)=\dfrac{C_4^1\cdot C_3^3}{C_7^4}=\dfrac{4}{35}$，

所以 ξ 的分布列为

ξ	0	2	4
P	$\dfrac{12}{35}$	$\dfrac{19}{35}$	$\dfrac{4}{35}$

$E\xi=0\times\dfrac{12}{35}+2\times\dfrac{19}{35}+4\times\dfrac{4}{35}=\dfrac{54}{35}$．………………10 分