江苏省仪征中学 2019-2020 学年第一学期高三数学
中档大题训练（3）　　9.20

班级 ________________　　　　姓名________________

1．在△ABC 中，角 A，B，C 所对的边为 a，b，c，已知 $2b\cos A = 2c - \sqrt{3}a$．

（1）求 B；

（2）设函数 $f(x) = \cos x \cdot \sin(x + \frac{\pi}{3}) - \frac{\sqrt{3}}{4}$，求 $f(A)$ 的最大值．

2. 设函数 $f(x)=\mathrm{e}^{x}-a\ln x(a\in\mathbf{R})$ ，其中 e 为自然对数的底数.

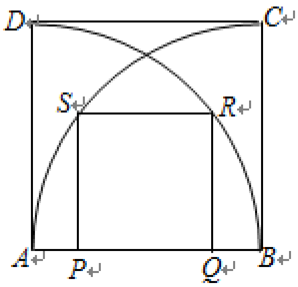
（1）当 $a<0$ 时，判断函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）若直线 $y=\mathrm{e}$ 是函数 $f(x)$ 的切线，求实数 a 的值；

3．一件铁艺品由边长为 1（米）的正方形及两段圆弧组成，如图所示，弧 BD，弧 AC 分别是以 A，B 为圆心半径为 1（米）的四分之一圆弧．若要在铁艺中焊装一个矩形 $PQRS$，使 S，R 分别在圆弧 AC，BD 上，P，Q 在边 AB 上，设矩形 $PQRS$ 的面积为 y．

（1）设 $AP=t$，$\angle PAR=\theta$，将 y 表示成 t 的函数或将 y 表示成 θ 的函数（只需选择一个变量求解），并写出函数的定义域；

（2）求面积 y 取最大值时对应自变量的值（若选 θ 作为自变量，求 $\cos\theta$ 的值）．



4. 已知$\triangle ABC$的三个顶点$A(-1,0)$，$B(1,0)$，$C(3,2)$，其外接圆H.

（1）求圆H的方程；

（2）若直线l过点C，且被圆H截得的弦长为2，求直线l的方程；

（3）对于线段BH上的任意一旦P，若在以C为圆心的圆上都存在不同的两点M，N，使得点M是线段PN的中点，求圆C的半径r的取值范围.

江苏省仪征中学2019-2020学年第一学期高三数学

中档大题训练（3）答案　　9.20

1．

解：（1）在$\triangle ABC$中，因为$2b\cos A=2c-\sqrt{3}a$，

由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，

所以$2\sin B\cos A=2\sin C-\sqrt{3}\sin A$，

又因为$\triangle ABC$中，$\sin C=\sin(A+B)$，

所以$2\sin B\cos A=2\sin(A+B)-\sqrt{3}\sin A$，

即$2\sin B\cos A=2\sin A\cos B+2\cos A\sin B-\sqrt{3}\sin A$，

所以$\sqrt{3}\sin A=2\cos B\sin A$，

又因为$\triangle ABC$中，$\sin A\neq 0$，所以$\cos B=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

又因为$B\in(0,\pi)$，所以$B=\frac{\pi}{6}$．

（不说明$\sin A\neq 0$，扣1分）

（2）$f(x)=\cos x\cdot(\sin x\cdot\cos\frac{\pi}{3}+\cos x\cdot\sin\frac{\pi}{3})-\frac{\sqrt{3}}{4}$

$$=\frac{1}{2}\sin x\cdot\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos^2 x-\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$=\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{4}(\cos 2x+1)-\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{2}\sin(2x+\frac{\pi}{3})$$．

所以$f(A)=\frac{1}{2}\sin(2A+\frac{\pi}{3})$，

因为在$\triangle ABC$中，$B=\frac{\pi}{6}$，且$A+B+C=\pi$，所以$A\in(0,\frac{5}{6}\pi)$，

所以$2A+\frac{\pi}{3}\in(\frac{\pi}{3},2\pi)$，所以当$2A+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，

即$A=\frac{\pi}{12}$时，$f(A)$的最大值为$\frac{1}{2}$．

2．（1）函数 $f(x)=\mathrm{e}^{x}-a\ln x(a\in\mathbf{R})$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

因为 $a<0$ ，

所以 $f'(x)=\mathrm{e}^{x}-\dfrac{a}{x}>0$ ，

所以 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

（2）设切点为 $\left(x_0,\mathrm{e}^{x_0}-a\ln x_0\right)$ ，则 $\mathrm{e}^{x_0}-a\ln x_0=\mathrm{e}$ ，

因为 $f'(x)=\mathrm{e}^{x}-\dfrac{a}{x}$ ，

所以 $\mathrm{e}^{x_0}-\dfrac{a}{x_0}=0$ ，得 $a=x_0\mathrm{e}^{x_0}$ ，

所以 $\mathrm{e}^{x_0}-x_0\mathrm{e}^{x_0}\ln x_0=\mathrm{e}$.

设 $g(x)=\mathrm{e}^{x}-x\mathrm{e}^{x}\ln x$ ，则 $g'(x)=(-x-1)\mathrm{e}^{x}\ln x$ ，

所以当 $0<x<1$ 时， $g'(x)>0$ ， $g(x)$ 单调递增；当 $x>1$ 时， $g'(x)<0$ ， $g(x)$ 单调递减，

所以 $g(x)_{\max}=g(1)=\mathrm{e}$.

所以方程 $\mathrm{e}^{x_0}-x_0\mathrm{e}^{x_0}\ln x_0=\mathrm{e}$ 仅有一解 $x_0=1$ ，

所以 $a=\mathrm{e}$.

3.【解】选 $AP=t$.

（1）依题意，$BQ=t$，$PQ=1-2t$.

在 Rt△AQR 中，$\angle RQA$＝90°，AQ＝1－t，AR＝1，

故 RQ＝$\sqrt{1-(1-t)^2}=\sqrt{-t^2+2t}$．

所以 y＝$PQ\cdot RQ$＝$(1-2t)\cdot\sqrt{-t^2+2t}$．　　　　　…… 5 分

显然 $\begin{cases}0<t<1,\\0<1-2t<1,\end{cases}$ 解得 $0<t<\dfrac{1}{2}$．

所以 y＝$(1-2t)\cdot\sqrt{-t^2+2t}$，定义域为 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$．　　　　　…… 7 分

（2）由（1）知，y＝$(1-2t)\cdot\sqrt{-t^2+2t}$，即 y＝$\sqrt{(1-2t)^2(-t^2+2t)}$，$0<t<\dfrac{1}{2}$．

令 $f(t)=(1-2t)^2(-t^2+2t)=-4t^4+12t^3-9t^3+2t$，$0<t<\dfrac{1}{2}$．

则 $f'(t)=-16t^3+36t^2-18t+2=-2(8t^3-1-18t^2+9t)$

$=-2\left[(1-2t)(4t^2+2t+1)-9t(2t-1)\right]=-2(2t-1)(4t^2-7t+1)$．

令 $f'(t)=0$，得 $t=\dfrac{7-\sqrt{33}}{8}$ 或 $t=\dfrac{7+\sqrt{33}}{8}$（舍）或 $\dfrac{1}{2}$（舍）．　　　　…… 10 分

列表：

t	$\left(0,\dfrac{7-\sqrt{33}}{8}\right)$	$\dfrac{7-\sqrt{33}}{8}$	$\left(\dfrac{7-\sqrt{33}}{8},\dfrac{1}{2}\right)$
$f'(t)$	＋	0	－
$f(t)$	单调增	极大值	单调减

所以当 $t=\dfrac{7-\sqrt{33}}{8}$ 时，$f(t)$ 取最大值，y 取最大值．

答：面积 y 取最大值时，AP 的长为 $\dfrac{7-\sqrt{33}}{8}$ 米．　　　　　…… 14 分

选 $\angle PAR=\theta$

（1）在 Rt△AQR 中，$\angle RQA$＝90°，AR＝1，$\angle RAQ$＝θ，

所以 RQ＝$\sin\theta$，AQ＝$\cos\theta$．

故 BQ＝AB－AQ＝1－$\cos\theta$，且 AP＝1－$\cos\theta$．

所以 PQ＝AQ－AP＝$\cos\theta$－(1－$\cos\theta$)＝2$\cos\theta$－1．

所以 y＝$PQ\cdot RQ$＝(2$\cos\theta$－1)$\sin\theta$．　　　　　…… 5 分

依题意，$\begin{cases}0<\sin\theta<1,\\0<2\cos\theta-1<1,\end{cases}$，解得锐角 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$.

所以 y＝$(2\cos\theta－1)\sin\theta$，定义域为 $\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$. …… 7 分

（2）由（1）知，$y=(2\cos\theta-1)\sin\theta$，$0<\theta<\frac{\pi}{3}$，

故 $y'=-2\sin\theta\cdot\sin\theta+(2\cos\theta-1)\cos\theta=2\cos^2\theta-2\sin^2\theta-\cos\theta$

$=2\cos^2\theta-2(1-\cos^2\theta)-\cos\theta=4\cos^2\theta-\cos\theta-2$，

令 $y'=0$，解得 $\cos\theta=\frac{1+\sqrt{33}}{8}$（负舍），设锐角 $\theta_0\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$，且 $\cos\theta_0=\frac{1+\sqrt{33}}{8}$.

…… 10 分

列表：

θ	$(0,\theta_0)$	θ_0	$\left(\theta_0,\frac{\pi}{3}\right)$
y'	＋	0	－
y	单调增	极大值	单调减

故当 $\theta=\theta_0$ 时，y 取最大值.

答：面积 y 取最大值时，$\cos\theta$ 的值为 $\frac{1+\sqrt{33}}{8}$. …… 14 分

4. 解答：（1）由题意，$A(-1，0)$，$B(1，0)$，$C(3，2)$，∴ AB 的垂直平分线是 $x=0$，

∵ BC：$y=x-1$，BC 中点是(2，1)，∴ BC 的垂直平分线是 $y=-x+3$，

由 $\begin{cases}x=0\\y=-x+3\end{cases}$，得到圆心是(0，3)，∴ $r=\sqrt{10}$，∴ 圆 H 的方程是 $x^2+(y-3)^2=10$；

（2）∵弦长为 2，∴圆心到 l 的距离 d＝3.

设 l：$y=k(x-3)+2$，则 $d=\frac{|-3-3k+2|}{\sqrt{k^2+1}}=3$，∴ $k=\frac{4}{3}$，∴ l 的方程 $y=\frac{4}{3}x-2$；

当直线的斜率不存在时，$x=3$，也满足题意.

综上，直线 l 的方程是 $x=3$ 或 $y=\frac{4}{3}x-2$；

（3）直线 BH 的方程为 $3x+y-3=0$，设 $P(m,n)(0\le m\le 1)$， $N(x,y)$.

因为点 M 是点 P，N 的中点，所以 $M(\frac{m+x}{2},\frac{n+y}{2})$，

又 M，N 都在半径为 r 的圆 C 上，所以 $\begin{cases}(x-3)^2+(y-2)^2=r^2\\(\frac{m+x}{2}-3)^2+(\frac{n+y}{2}-3)^2=r^2\end{cases}$，

即 $\begin{cases}(x-3)^2+(y-2)^2=r^2\\(m+x-6)^2+(n+y-6)^2=4r^2\end{cases}$，因为该关于 x，y 的方程组有解，

即以(3，2)为圆心，r 为半径的圆与以 $(6-m,4-n)$ 为圆心，$2r$ 为半径的圆相交，

所以 $(2r-r)^2<(3-6+m)^2+(2-4+n)^2<(r+2r)^2$，又 $3m+n-3=0$，

所以 $r2<10m^2-12m+10<9r^2$ 对任意 $m\in[0,1]$ 成立.

而 $f(m)=10m^2-12m+10$ 在 $[0,1]$ 上的值域为 $[\frac{32}{5},10]$，

又线段 BH 与圆 C 无公共点，所以 $(m-3)^2+(3-3m-2)^2>r^2$ 对任意 $m\in[0,1]$ 成立，即 $r^2<\frac{32}{5}$.

故圆 C 的半径 r 的取值范围为 $(\frac{\sqrt{10}}{3},\frac{4\sqrt{10}}{5})$.