

空间向量与立体几何复习课

【学习目标】

1.梳理本章知识,构建知识网络.2.巩固空间向量的有关知识.3.会用向量法解决立体几何问题.

【知识梳理】

1.空间向量的基本概念及运算.

2.会用向量法解决立体几何问题.

(1)空间中点、线、面位置关系的向量表示

设直线 l, m 的方向向量分别为 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, 平面 α, β 的法向量分别为 $\boldsymbol{\mu}, \mathbf{v}$, 则

线线平行	$l // m \Leftrightarrow \mathbf{a} // \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} = k\mathbf{b}, k \in \mathbf{R}$
线面平行	$l // \alpha \Leftrightarrow \mathbf{a} \perp \boldsymbol{\mu} \Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\mu} = 0$
面面平行	$\alpha // \beta \Leftrightarrow \boldsymbol{\mu} // \mathbf{v} \Leftrightarrow \boldsymbol{\mu} = k\mathbf{v}, k \in \mathbf{R}$
线线垂直	$l \perp m \Leftrightarrow \mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$
线面垂直	$l \perp \alpha \Leftrightarrow \mathbf{a} // \boldsymbol{\mu} \Leftrightarrow \mathbf{a} = k\boldsymbol{\mu}, k \in \mathbf{R}$
面面垂直	$\alpha \perp \beta \Leftrightarrow \boldsymbol{\mu} \perp \mathbf{v} \Leftrightarrow \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{v} = 0$
线线角	l, m 所成的角为 $\theta (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$, $\cos \theta = \frac{ \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} }{ \mathbf{a} \mathbf{b} }$
线面角	l, α 所成的角为 $\theta (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$, $\sin \theta = \frac{ \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\mu} }{ \mathbf{a} \boldsymbol{\mu} }$
二面角	α, β 所成的角为 $\theta (0 \leq \theta \leq \pi)$, $ \cos \theta = \frac{ \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{v} }{ \boldsymbol{\mu} \mathbf{v} }$

(2) 用向量法解决立体几何问题

步骤如下: ①建立适当的空间直角坐标系; ②写出相关点的坐标及向量的坐标; ③进行相关坐标的运算;

④写出几何意义下的结论.

【典例精讲】

例 1 (1)判断下列各命题的真假:

①向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 平行, 则 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的方向相同或相反; ②两个有共同起点而且相等的向量, 其终点必相同; ③零向量是没有方向的; ④有向线段就是向量, 向量就是有向线段. 其中假命题的个数为()

A.2 B.3 C.4 D.5

考点 空间向量的相关概念及其表示方法

题点 相等、相反向量

答案 B

解析 ①假命题, 当 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 中有一个为零向量时, 其方向是不确定的; ②真命题; ③假命题, 零向量也是向量, 故也有方向, 只是方向不确定; ④假命题, 向量可用有向线段来表示, 但并不是有向线段.

(2)如图, 在四棱锥 $S-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形, S 到 A, B, C, D 的距离都等于 2. 给出以下结论:

- ① $\vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC} + \vec{SD} = \mathbf{0}$; ② $\vec{SA} + \vec{SB} - \vec{SC} - \vec{SD} = \mathbf{0}$;
③ $\vec{SA} - \vec{SB} + \vec{SC} - \vec{SD} = \mathbf{0}$; ④ $\vec{SA} \cdot \vec{SB} = \vec{SC} \cdot \vec{SD}$; ⑤ $\vec{SA} \cdot \vec{SC} = 0$,

其中正确结论的序号是_____.

考点 空间向量的运算

题点 空间向量的运算

答案 ③④

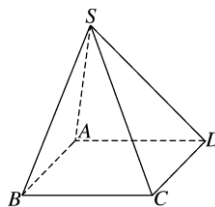
解析 可以推出: $\vec{SA} - \vec{SB} + \vec{SC} - \vec{SD} = \vec{BA} + \vec{DC} = \mathbf{0}$, 所以③正确; 又因为底面 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形, $SA = SB = SC = SD = 2$, 所以 $\vec{SA} \cdot \vec{SB} = 2 \times 2 \times \cos \angle ASB$, $\vec{SC} \cdot \vec{SD} = 2 \times 2 \times \cos \angle CSD$, 而 $\angle ASB = \angle CSD$,

于是 $\vec{SA} \cdot \vec{SB} = \vec{SC} \cdot \vec{SD}$, 因此④正确, 其余三个都不正确, 故正确结论的序号是③④.

反思感悟 向量的表示与运算的关键是熟练掌握向量加减运算的平行四边形法则、三角形法则及各运算公式, 理解向量运算法则、运算律及其几何意义.

跟踪训练 1 (1)已知向量 $\mathbf{a} = (2, -1, 3)$, $\mathbf{b} = (-4, 2, x)$, 则使 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ 成立的 x 与使 $\mathbf{a} // \mathbf{b}$ 成立的 x 分别为()

A. $\frac{10}{3}, -6$ B. $-\frac{10}{3}, 6$ C. $-6, \frac{10}{3}$ D. $6, -\frac{10}{3}$



考点 空间向量运算的坐标表示

题点 空间向量的坐标运算

答案 A

解析 由 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -10 + 3x = 0$, 得 $x = \frac{10}{3}$, 由 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \Leftrightarrow \frac{2}{-4} = \frac{3}{x}$, 得 $x = -6$.

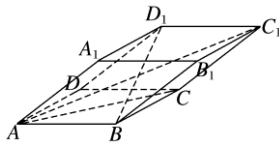
(2) 如图所示, 在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 以顶点 A 为端点的三条棱长度都为 1, 且两两夹角为 60° :

① 求 $\overrightarrow{AC_1}$ 的模长;

② 求 $\overrightarrow{BD_1}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 夹角的余弦值.

考点 空间向量数量积的应用

题点 数量积的综合应用



解 记 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{AA_1} = \mathbf{c}$, 则 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = 1$, $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \rangle = 60^\circ$, $\therefore \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = \frac{1}{2}$.

① $|\overrightarrow{AC_1}|^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 + 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) = 1 + 1 + 1 + 2 \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = 6$, $\therefore |\overrightarrow{AC_1}| = \sqrt{6}$.

② $\overrightarrow{BD_1} = \mathbf{b} + \mathbf{c} - \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AC} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\therefore |\overrightarrow{BD_1}| = \sqrt{2}$, $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{3}$, $\overrightarrow{BD_1} \cdot \overrightarrow{AC} = (\mathbf{b} + \mathbf{c} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{b}^2 - \mathbf{a}^2 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 1$, $\therefore \cos \langle \overrightarrow{BD_1}, \overrightarrow{AC} \rangle = \frac{\overrightarrow{BD_1} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{BD_1}| |\overrightarrow{AC}|} = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

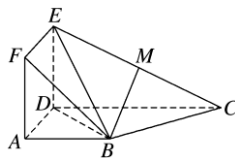
例 2 如图, 正方形 $ADEF$ 与梯形 $ABCD$ 所在的平面互相垂直, $AD \perp CD$, $AB \parallel CD$, $AB = AD = 2$, $CD = 4$, M 为 CE 的中点.

(1) 求证: $BM \parallel$ 平面 $ADEF$;

(2) 求证: $BC \perp$ 平面 BDE .

考点 空间向量在证明平行与垂直中的应用

题点 空间向量证明平行与垂直



证明 $\because$ 平面 $ADEF \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $ADEF \cap$ 平面 $ABCD = AD$, $AD \perp ED$, $ED \subset$ 平面 $ADEF$, $\therefore ED \perp$ 平面 $ABCD$.

以 D 为原点, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DE}$ 分别为 x 轴, y 轴, z 轴的正方向建立如图所示空间直角坐标系.

则 $D(0,0,0)$, $A(2,0,0)$, $B(2,2,0)$, $C(0,4,0)$, $E(0,0,2)$, $F(2,0,2)$.

(1) $\because M$ 为 EC 的中点, $\therefore M(0,2,1)$,

则 $\overrightarrow{BM} = (-2,0,1)$, $\overrightarrow{AD} = (-2,0,0)$, $\overrightarrow{AF} = (0,0,2)$,

$\therefore \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AF}$, 故 $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AF}$ 共面.

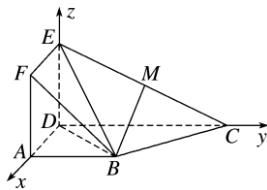
又 $BM \not\subset$ 平面 $ADEF$, $\therefore BM \parallel$ 平面 $ADEF$.

(2) $\overrightarrow{BC} = (-2,2,0)$, $\overrightarrow{DB} = (2,2,0)$, $\overrightarrow{DE} = (0,0,2)$,

$\therefore \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DB} = -4 + 4 = 0$, $\therefore BC \perp DB$.

又 $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DE} = 0$, $\therefore BC \perp DE$.

又 $DE \cap DB = D$, $\therefore BC \perp$ 平面 BDE .



引申探究

本例条件不变, 如何证明平面 $BCE \perp$ 平面 BDE .

证明 由例 2(2) 知 $BC \perp$ 平面 BDE , 又 $BC \subset$ 平面 BCE , $\therefore$ 平面 $BCE \perp$ 平面 BDE .

反思感悟 利用空间向量证明或求解立体几何问题时, 首先要转化为其坐标运算, 再借助于坐标的有关性质求解(证).

跟踪训练 2 (1) 已知线段 AB 两端点的坐标分别为 $A(9, -3, 4)$, $B(9, 2, 1)$, 则线段 AB 与坐标平面 yOz 的位置关系为_____.

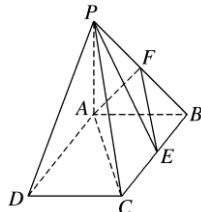
答案 平行

解析 $\overrightarrow{AB} = (0, 5, -3)$, 平面 yOz 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (1, 0, 0)$, 因为 $\overrightarrow{AB} \cdot \mathbf{n} = 0$, 且 $AB \not\subset$ 平面 yOz , 所以 AB 与平面 yOz 平行.

(2) 如图所示, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 四边形 $ABCD$ 是矩形, $PA = AB = 1$, 点 F 是 PB 的中点, 点 E 在边 BC 上移动.

① 当点 E 为 BC 的中点时, 试判断 EF 与平面 PAC 的位置关系, 并说明理由;

② 证明: 无论点 E 在边 BC 上的何处, 都有 $PE \perp AF$.



考点 空间向量在证明平行与垂直中的应用

题点 空间向量证明平行与垂直

① 解 如图,以 A 为原点, $\vec{AD}$, $\vec{AB}$, $\vec{AP}$ 所在方向分别为 x 轴, y 轴, z 轴的正方向建立空间直角坐标系, 则 $A(0,0,0)$, $P(0,0,1)$, $B(0,1,0)$, 设 $D(a,0,0)$, 则 $C(a,1,0)$.

$\because E$ 为 BC 的中点, F 为 BP 的中点, $\therefore E\left(\frac{a}{2}, 1, 0\right)$, $F\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

$\therefore \vec{EF} = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\vec{AP} = (0,0,1)$, $\vec{AC} = (a,1,0)$.

设平面 PAC 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \vec{AP} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \vec{AC} = 0, \end{cases} \therefore \begin{cases} z = 0, \\ ax + y = 0, \end{cases}$

取 $x=1$, 则 $\mathbf{n} = (1, -a, 0)$, $\therefore \vec{EF} \cdot \mathbf{n} = 0$, $\therefore \vec{EF} \perp \mathbf{n}$.

又 $EF \not\subset$ 平面 PAC , $\therefore EF \parallel$ 平面 PAC .

② 证明 $\because E$ 在 BC 上, $\therefore$ 可设 $E(m,1,0)$, $0 \leq m \leq a$,

$\therefore \vec{PE} = (m, 1, -1)$, $\vec{AF} = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\therefore \vec{PE} \cdot \vec{AF} = 0$, $\therefore PE \perp AF$,

$\therefore$ 无论点 E 在边 BC 上的何处, 都有 $PE \perp AF$.

例 3 如图, 正方形 $ABCD$ 的中心为 O , 四边形 $OBEF$ 为矩形, 平面 $OBEF \perp$ 平面 $ABCD$, 点 G 为 AB 的中点, $AB = BE = 2$.

(1) 求证: $EG \parallel$ 平面 ADF ;

(2) 求二面角 $O-EF-C$ 的正弦值;

(3) 设 H 为线段 AF 上的点, 且 $AH = \frac{2}{3}HF$, 求直线 BH 和平面 CEF 所成角的正弦值.

考点 空间向量在求空间角中的应用

题点 空间向量求线面角

(1) 证明 依题意, $OF \perp$ 平面 $ABCD$,

如图, 以 O 为原点, 分别以 $\vec{AD}$, $\vec{BA}$, $\vec{OF}$ 的方向为 x 轴, y 轴, z 轴的正方向建立空间直角坐标系, 依题意可得 $O(0,0,0)$, $A(-1,1,0)$, $B(-1,-1,0)$, $C(1,-1,0)$, $D(1,1,0)$, $E(-1,-1,2)$, $F(0,0,2)$, $G(-1,0,0)$.

依题意, $\vec{AD} = (2,0,0)$, $\vec{AF} = (1,-1,2)$.

设 $\mathbf{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ 为平面 ADF 的法向量,

$$\begin{cases} \mathbf{n}_1 \cdot \vec{AD} = 0, \\ \mathbf{n}_1 \cdot \vec{AF} = 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} 2x_1 = 0, \\ x_1 - y_1 + 2z_1 = 0, \end{cases}$$

不妨取 $z_1 = 1$, 可得 $\mathbf{n}_1 = (0, 2, 1)$,

又 $\vec{EG} = (0, 1, -2)$, 可得 $\vec{EG} \cdot \mathbf{n}_1 = 0$,

又因为直线 $EG \not\subset$ 平面 ADF , 所以 $EG \parallel$ 平面 ADF .

(2) 解 易证 $\vec{OA} = (-1, 1, 0)$ 为平面 OEF 的一个法向量, 依题意, $\vec{EF} = (1, 1, 0)$, $\vec{CF} = (-1, 1, 2)$.

设 $\mathbf{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ 为平面 CEF 的法向量,

$$\begin{cases} \mathbf{n}_2 \cdot \vec{EF} = 0, \\ \mathbf{n}_2 \cdot \vec{CF} = 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x_2 + y_2 = 0, \\ -x_2 + y_2 + 2z_2 = 0, \end{cases}$$

不妨取 $x_2 = 1$, 可得 $\mathbf{n}_2 = (1, -1, 1)$.

因此有 $\cos \langle \vec{OA}, \mathbf{n}_2 \rangle = \frac{\vec{OA} \cdot \mathbf{n}_2}{|\vec{OA}| |\mathbf{n}_2|} = -\frac{\sqrt{6}}{3}$,

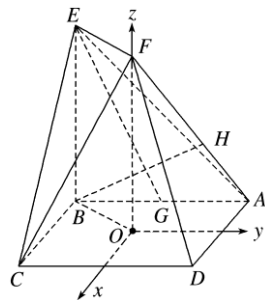
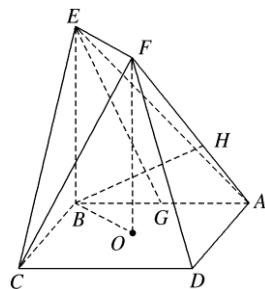
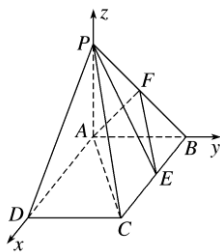
于是 $\sin \langle \vec{OA}, \mathbf{n}_2 \rangle = \frac{\sqrt{3}}{3}$. 所以二面角 $O-EF-C$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(3) 解 由 $AH = \frac{2}{3}HF$, 得 $AH = \frac{2}{5}AF$.

因为 $\vec{AF} = (1, -1, 2)$, 所以 $\vec{AH} = \frac{2}{5}\vec{AF} = \left(\frac{2}{5}, -\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)$, 进而有 $H\left(-\frac{3}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$, 从而 $\vec{BH} = \left(\frac{2}{5}, \frac{8}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

因此 $\cos \langle \vec{BH}, \mathbf{n}_2 \rangle = \frac{\vec{BH} \cdot \mathbf{n}_2}{|\vec{BH}| |\mathbf{n}_2|} = -\frac{\sqrt{7}}{21}$. 所以直线 BH 和平面 CEF 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{7}}{21}$.

反思感悟 (1) 异面直线所成的角, 可通过两异面直线的方向向量夹角的余弦值的绝对值求解. (2) 线面角的正弦值等于直线方向向量与平面法向量夹角的余弦值的绝对值. (3) 对于二面角应先求两平面法向量的夹角, 再结合图形判断二面角是锐角或钝角, 最后下结论.



【课堂小结】

解决立体几何中的问题，可用三种方法：综合法、基向量法、坐标法. 综合法以逻辑推理作为工具解决问题；基向量法利用向量的概念及其运算解决问题；坐标法利用数及其运算来解决问题. 坐标方法经常与向量运算结合起来使用.

用向量法解决立体几何问题关键点如下：1) 选择恰当的坐标系. 坐标系的选取很重要，恰当的坐标系可以使得点的坐标、向量的坐标易求且简单，简化运算过程；2) 点的坐标、向量的坐标的确定. 将几何问题转化为向量的问题，必须确定点的坐标、直线的方向向量、平面的法向量，这是最核心的问题；3) 几何问题与向量问题的转化. 平行、垂直、夹角问题都可以通过向量计算来解决，如何转化也是这类问题解决的关键.

空间向量与立体几何复习课

1. 在下列命题中：

- ① 若向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 共线，则向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 所在的直线平行；
- ② 若向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 所在的直线为异面直线，则向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 一定不共面；
- ③ 若三个向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 两两共面，则向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 共面；
- ④ 已知空间的三个向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ ，则对于空间的任意一个向量 $\mathbf{p}$ 总存在实数 x, y, z 使得 $\mathbf{p} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c}$.

其中正确命题的个数是()

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

答案 A

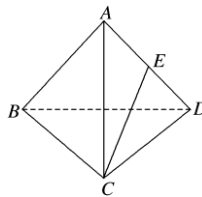
解析 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 共线， $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 所在的直线也可能重合，故①不正确；根据自由向量的意义知，空间任意两向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 都共面，故②不正确；三个向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 中任意两个一定共面，但它们三个却不一定共面，故③不正确；只有当 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 不共面时，空间任意一向量 $\mathbf{p}$ 才能表示为 $\mathbf{p} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c}$ ，故④不正确，综上所述可知四个命题中正确的个数为 0，故选 A.

2. 如图，三棱锥 $A-BCD$ 的棱长全相等，点 E 为棱 AD 的中点，则直线 CE 与 BD 所成角的余弦值为()

A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{33}}{6}$ D. $\frac{1}{2}$

答案 A

解析 方法一 取 AB 中点 G ，连结 EG, CG .



$\because E$ 为 AD 的中点， $\therefore EG \parallel BD$.

$$\therefore \angle GEC \text{ 为 } CE \text{ 与 } BD \text{ 所成的角. 设 } AB=1, \text{ 则 } EG=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}, CE=CG=\frac{\sqrt{3}}{2}, \therefore \cos \angle GEC = \frac{EG^2 + EC^2 - GC^2}{2 \times EG \times EC} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

方法二 设 $AB=1$ ，则 $\vec{CE} \cdot \vec{BD} = (\vec{AE} - \vec{AC}) \cdot (\vec{AD} - \vec{AB}) = \left(\frac{1}{2}\vec{AD} - \vec{AC}\right) \cdot (\vec{AD} - \vec{AB}) = \frac{1}{2}\vec{AD}^2 - \frac{1}{2}\vec{AD} \cdot \vec{AB} - \vec{AC} \cdot \vec{AD} + \vec{AC} \cdot \vec{AB} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 60^\circ - \cos 60^\circ + \cos 60^\circ = \frac{1}{4}$.

$$\therefore \cos \langle \vec{CE}, \vec{BD} \rangle = \frac{\vec{CE} \cdot \vec{BD}}{|\vec{CE}| |\vec{BD}|} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6}, \text{ 故选 A}$$

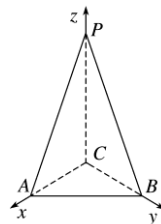
3. 在下列命题中：

- ① 向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 的夹角 $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ 与它们所在直线所成的角相等.
- ② 两异面直线夹角的范围是 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ ，直线与平面所成角的范围是 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ，二面角的范围是 $[0, \pi]$.
- ③ 若空间向量 $\mathbf{a}$ 平行于平面 α ，则 $\mathbf{a}$ 所在直线与平面 α 平行.
- ④ 只有两两垂直的三个向量才能作为空间向量的一组基底.

⑤ 若 P, A, B, C 为空间四点，且 $\vec{PA} = \alpha\vec{PB} + \beta\vec{PC}$ ，则“ $\alpha + \beta = 1$ ”是“ A, B, C 三点共线”的充要

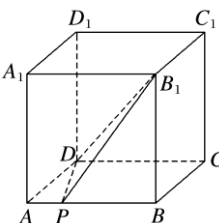
条件. 其中正确命题是()

A. ①② B. ③④⑤ C. ②⑤ D. ②④⑤



4. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $\vec{AB} = (4, -2, 3)$ ， $\vec{AD} = (-4, 1, 0)$ ， $\vec{AP} = (-6, 2, -8)$ ，则这个四棱锥的高 h

等于



()

A.1 B.2 C.13 D.26

考点 向量法求空间距离

题点 向量法求点到平面的距离

答案 B

解析 设平面 $ABCD$ 的法向量为 $\mathbf{n}=(x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{AB}=0, \\ \vec{n} \cdot \vec{AD}=0, \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} 4x-2y+3z=0, \\ -4x+y=0. \end{cases}$$

不妨令 $x=3$, 则 $y=12, z=4$, 可得 $\mathbf{n}=(3,12,4)$, 四棱锥的高 $h=\frac{\vec{AP} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}=\frac{26}{13}=2$.

5. 如图所示, 在四棱锥 $M-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形, 侧棱 AM 的长为 3, 且 AM 和 AB, AD 的夹角都是 60° , N 是 CM 的中点, 设 $\mathbf{a}=\vec{AB}, \mathbf{b}=\vec{AD}, \mathbf{c}=\vec{AM}$, 试以 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 为基向量表示出向量 $\vec{BN}$, 则 $\vec{BN}=\underline{\hspace{2cm}}$, BN 的长为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

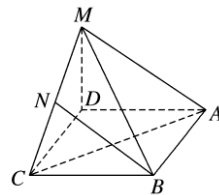
考点 空间向量数量积的应用

题点 利用数量积求线段长

$$\text{解 } \vec{BN}=\vec{BC}+\vec{CN}=\vec{AD}+\frac{1}{2}\vec{CM}=\vec{AD}+\frac{1}{2}(\vec{AM}-\vec{AC})=\vec{AD}+\frac{1}{2}(\vec{AM}-(\vec{AD}+\vec{AB}))=-\frac{1}{2}\vec{AB}+\frac{1}{2}\vec{AD}+\frac{1}{2}\vec{AM}.$$

$$\text{所以 } \vec{BN}=-\frac{1}{2}\mathbf{a}+\frac{1}{2}\mathbf{b}+\frac{1}{2}\mathbf{c}, |\vec{BN}|^2=\vec{BN}^2=\left(-\frac{1}{2}\mathbf{a}+\frac{1}{2}\mathbf{b}+\frac{1}{2}\mathbf{c}\right)^2=\frac{1}{4}(\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2+\mathbf{c}^2-2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}-2\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}+2\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})=\frac{17}{4}.$$

$$\text{所以 } |\vec{BN}|=\frac{\sqrt{17}}{2}, \text{ 即 } BN \text{ 的长为 } \frac{\sqrt{17}}{2}.$$



6. 如图所示, 已知正四面体 $A-BCD$ 中, $AE=\frac{1}{4}AB, CF=\frac{1}{4}CD$, 则直线 DE 和 BF 所成角的余弦值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

考点 空间向量在求空间角中的应用

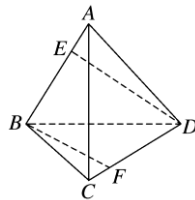
题点 空间向量求线线角

答案 $\frac{4}{13}$

解析 设正四面体棱长为 4,

$$\vec{ED}=\vec{EA}+\vec{AD}=\frac{1}{4}\vec{BA}+\vec{AD}, \vec{BF}=\vec{BC}+\vec{CF}=\vec{BC}+\frac{1}{4}\vec{CD},$$

$$\text{所以 } \cos \langle \vec{ED}, \vec{BF} \rangle = \frac{\vec{ED} \cdot \vec{BF}}{|\vec{ED}| |\vec{BF}|} = \frac{\left(\frac{1}{4}\vec{BA}+\vec{AD}\right) \cdot \left(\vec{BC}+\frac{1}{4}\vec{CD}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{4}\vec{BA}+\vec{AD}\right)^2} \sqrt{\left(\vec{BC}+\frac{1}{4}\vec{CD}\right)^2}} = \frac{2+0+0+2}{\sqrt{13} \sqrt{13}} = \frac{4}{13}.$$



7. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 P 在 A_1C 上运动(包括端点), 则 BP 与 AD_1 所成角的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

答案 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$

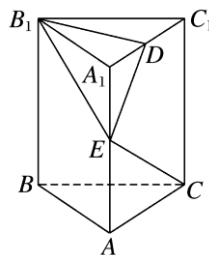
解析 以点 D 为原点, DA, DC, DD_1 所在直线分别为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系(图略), $-x, x)(0 \leq x \leq 1)$,

$$\text{则 } \vec{BP}=(x-1, -x, x), \vec{BC_1}=(-1, 0, 1),$$

$$\text{因为 } BC_1 \parallel AD_1, \text{ 设 } \vec{BP}, \vec{BC_1} \text{ 的夹角为 } \alpha, \text{ 所以 } \cos \alpha = \frac{\vec{BP} \cdot \vec{BC_1}}{|\vec{BP}| |\vec{BC_1}|} = \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+2x^2} \times \sqrt{2}} =$$

$$\text{所以 当 } x=\frac{1}{3} \text{ 时, } \cos \alpha \text{ 取得最大值 } \frac{\sqrt{3}}{2}, \alpha=\frac{\pi}{6}.$$

$$\text{当 } x=1 \text{ 时, } \cos \alpha \text{ 取得最小值 } \frac{1}{2}, \alpha=\frac{\pi}{3}, \text{ 故 } \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right].$$

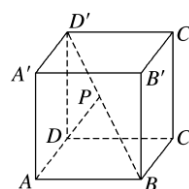


设正方体棱长为 1, 点 P 坐标为 $(x, 1$

$$\frac{1}{\sqrt{3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}} \times \sqrt{2}},$$

8. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是边长为 a 的正方形, 侧面 $PAD \perp$ 底面 $ABCD$, AD , 设 E, F 分别为 PC, BD 的中点.

(1) 求证: $EF \parallel$ 平面 PAD ;



$$\text{且 } PA=PD=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(2) 求证: 平面 $PAB \perp$ 平面 PDC .

证明 (1)如图, 取 AD 的中点 O , 连结 OP , OF .

因为 $PA=PD$, 所以 $PO \perp AD$.

因为侧面 $PAD \perp$ 底面 $ABCD$, 平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD=AD$,

$PO \subset$ 平面 PAD , 所以 $PO \perp$ 平面 $ABCD$.

又 O, F 分别为 AD, BD 的中点, 所以 $OF \parallel AB$.

又 $ABCD$ 是正方形, 所以 $OF \perp AD$.

因为 $PA=PD=\frac{\sqrt{2}}{2}AD$, 所以 $PA \perp PD$, $OP=OA=\frac{a}{2}$.

以 O 为原点, OA, OF, OP 所在直线分别为 x 轴, y 轴, z 轴建立空间直角坐标系,

则 $A(\frac{a}{2}, 0, 0), F(0, \frac{a}{2}, 0), D(-\frac{a}{2}, 0, 0), P(0, 0, \frac{a}{2}), B(\frac{a}{2}, a, 0), C(-\frac{a}{2}, a, 0)$.

因为 E 为 PC 的中点, 所以 $E(-\frac{a}{4}, \frac{a}{2}, \frac{a}{4})$.

易知平面 PAD 的一个法向量为 $\vec{OF}=(0, \frac{a}{2}, 0)$,

因为 $\vec{EF}=(\frac{a}{4}, 0, -\frac{a}{4})$, 且 $\vec{OF} \cdot \vec{EF}=(0, \frac{a}{2}, 0) \cdot (\frac{a}{4}, 0, -\frac{a}{4})=0$,

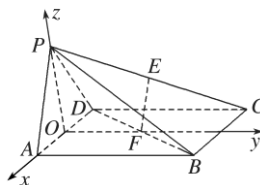
又因为 $EF \not\subset$ 平面 PAD , 所以 $EF \parallel$ 平面 PAD .

(2)因为 $\vec{PA}=(\frac{a}{2}, 0, -\frac{a}{2}), \vec{CD}=(0, -a, 0)$, 所以 $\vec{PA} \cdot \vec{CD}=(\frac{a}{2}, 0, -\frac{a}{2}) \cdot (0, -a, 0)=0$,

所以 $\vec{PA} \perp \vec{CD}$, 所以 $PA \perp CD$.

又 $PA \perp PD, PD \cap CD=D, PD, DC \subset$ 平面 PDC , 所以 $PA \perp$ 平面 PDC .

又 $PA \subset$ 平面 PAB , 所以平面 $PAB \perp$ 平面 PDC .



9.如图所示, 已知点 P 在正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的对角线 BD' 上, $\angle PDA=60^\circ$.

(1) 求 DP 与 CC' 所成角的大小;

(2) 求 DP 与平面 $AA'D'D$ 所成角的大小.

考点 空间向量在求空间角中的应用

题点 空间向量求线面角

解 (1)如图所示, 以 D 为原点, $\vec{DA}, \vec{DC}, \vec{DD'}$ 分别为 x 轴, y 轴, z 轴正方向建立空间直角坐标系,

设 $DA=1$. 则 $\vec{DA}=(1,0,0), \vec{CC'}=(0,0,1)$.

连结 $BD, B'D'$, 在平面 $BB'D'D$ 中, 延长 DP 交 $B'D'$ 于 H ,

设 $\vec{DH}=(m, m, 1)(m>0)$,

由已知得 $\langle \vec{DH}, \vec{DA} \rangle = 60^\circ$,

由 $\vec{DA} \cdot \vec{DH} = |\vec{DA}| |\vec{DH}| \cos \langle \vec{DH}, \vec{DA} \rangle$, 可得 $2m = \sqrt{2m^2+1}$, 解得 $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

所以 $\vec{DH}=(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$.

因为 $\cos \langle \vec{DH}, \vec{CC'} \rangle = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \times 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} \times 0 + 1 \times 1}{1 \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 $\langle \vec{DH}, \vec{CC'} \rangle = 45^\circ$,

即 DP 与 CC' 所成的角为 45° .

(2)平面 $AA'D'D$ 的法向量是 $\vec{DC}=(0,1,0)$,

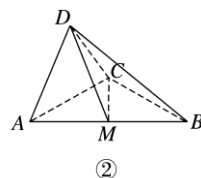
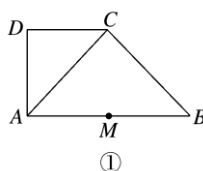
因为 $\cos \langle \vec{DH}, \vec{DC} \rangle = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \times 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} \times 1 + 1 \times 0}{1 \times \sqrt{2}} = \frac{1}{2}$,

所以 $\langle \vec{DH}, \vec{DC} \rangle = 60^\circ$, 可得 DP 与平面 $AA'D'D$ 所成的角为 30° .

10.如图①所示, 在直角梯形 $ABCD$ 中, $\angle ADC=90^\circ, CD \parallel AB, AB=4, AD=CD=2$, 点 M 为线段 AB 的中点, 将 $\triangle ADC$ 沿 AC 折起, 使平面 $ADC \perp$ 平面 ABC , 得到几何体 $D-ABC$, 如图②所示.

(1)求证: $BC \perp$ 平面 ACD ;

(2)求二面角 $A-CD-M$ 的余弦值.



考点 空间向量在求空间角中的应用

题点 空间向量求二面角

(1)证明 由已知可得 $AC=2\sqrt{2}$, $\angle CAB=45^\circ$, 在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理得 $CB=2\sqrt{2}$, 从而 $AC^2+BC^2=AB^2$, $\therefore AC \perp BC$.

$\because$ 平面 $ADC \perp$ 平面 ABC , 平面 $ADC \cap$ 平面 $ABC=AC$, $\therefore BC \perp$ 平面 ACD .

(2)解 取 AC 的中点 O , 连结 DO , MO , 由题意知 $DO \perp$ 平面 ABC .

$\because O, M$ 分别是 AC, AB 的中点, $\therefore OM \parallel BC$, $\therefore OM \perp AC$.

以 O 为坐标原点, 以 OA, OM, OD 所在的直线分别为 x, y, z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$. 由(1)知, $M(0, \sqrt{2}, 0), C(-\sqrt{2}, 0, 0), D(0, 0, \sqrt{2})$.

$\therefore \vec{CM}=(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0), \vec{CD}=(\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$,

设平面 CDM 的法向量为 $\mathbf{n}=(x, y, z)$, 则有 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \vec{CM}=0, \\ \mathbf{n} \cdot \vec{CD}=0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} \sqrt{2}x+\sqrt{2}y=0, \\ \sqrt{2}x+\sqrt{2}z=0. \end{cases}$

取 $x=-1$, 得平面 CDM 的一个法向量为 $\mathbf{n}=(-1, 1, 1)$.

由题意知平面 ACD 的一个法向量为 $\mathbf{m}=(0, 1, 0)$.

$\therefore \cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. 结合图形知二面角 $A-CD-M$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

11.如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1=AD=1$, E 为 CD 的中点.

(1) 求证: $B_1E \perp AD_1$;

(2) 在棱 AA_1 上是否存在一点 P , 使得 $DP \parallel$ 平面 B_1AE ? 若存在, 求 AP 的长; 若不存在, 说明理由;

(3) 若二面角 $A-B_1E-A_1$ 的大小为 30° , 求 AB 的长.

考点 空间向量在求空间角中的应用

题点 空间向量求线面角

(1)证明 以 A 为原点, $\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AA_1}$ 的方向分别为 x 轴, y 轴, z 轴的正方向建立空间直角坐标系(如图).

设 $AB=a(a>0)$, 则 $A(0, 0, 0), D(0, 1, 0), D_1(0, 1, 1), E(\frac{a}{2}, 1, 0), B_1(a, 0, 1)$,

故 $\vec{AD_1}=(0, 1, 1), \vec{B_1E}=(\frac{a}{2}, 1, -1), \vec{AB_1}=(a, 0, 1), \vec{AE}=(\frac{a}{2}, 1, 0)$.

$\therefore \vec{AD_1} \cdot \vec{B_1E} = -\frac{a}{2} \times 0 + 1 \times 1 + (-1) \times 1 = 0$, $\therefore B_1E \perp AD_1$.

(2)解 假设在棱 AA_1 上存在一点 $P(0, 0, z_0)(0 \leq z_0 \leq 1)$, 使得 $DP \parallel$ 平面 B_1AE , 此时 $\vec{DP}=(0, -1, z_0)$.

设平面 B_1AE 的法向量为 $\mathbf{n}=(x, y, z)$.

则 $\mathbf{n} \perp \vec{AB_1}, \mathbf{n} \perp \vec{AE}$, 得 $\begin{cases} ax+z=0, \\ \frac{ax}{2}+y=0. \end{cases}$

取 $x=1$, 得平面 B_1AE 的一个法向量 $\mathbf{n}=(1, -\frac{a}{2}, -a)$.

要使 $DP \parallel$ 平面 B_1AE , 只要 $\mathbf{n} \perp \vec{DP}$, 即 $\frac{a}{2} - az_0 = 0$, 解得 $z_0 = \frac{1}{2}$.

又 $DP \not\subset$ 平面 B_1AE , $\therefore$ 存在点 P , 使得 $DP \parallel$ 平面 B_1AE , 此时 $AP = \frac{1}{2}$.

(3)解 连结 A_1D, B_1C , 由长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 及 $AA_1=AD=1$, 得 $AD_1 \perp A_1D$.

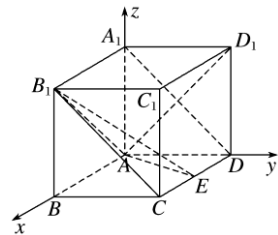
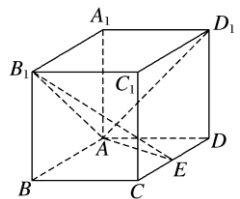
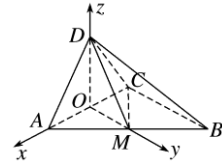
$\because B_1C \parallel A_1D$, $\therefore AD_1 \perp B_1C$,

又由(1)知 $B_1E \perp AD_1$, 且 $B_1C \cap B_1E = B_1$, $\therefore AD_1 \perp$ 平面 DCB_1A_1 ,

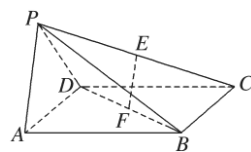
$\therefore \vec{AD_1}$ 是平面 A_1B_1E 的一个法向量, 此时 $\vec{AD_1}=(0, 1, 1)$.

设 $\vec{AD_1}$ 与 $\mathbf{n}$ 所成的角为 θ , 则 $\cos \theta = \frac{\mathbf{n} \cdot \vec{AD_1}}{|\mathbf{n}| |\vec{AD_1}|} = \frac{-\frac{a}{2} - a}{\sqrt{2} \sqrt{1 + \frac{a^2}{4} + a^2}}$,

$\because$ 二面角 $A-B_1E-A_1$ 的大小为 30° , $\therefore |\cos \theta| = \cos 30^\circ$, 即 $\frac{\frac{3a}{2}}{\sqrt{2} \sqrt{1 + \frac{5a^2}{4}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 解得 $a=2$, 即 AB 的长为 2.



12.如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 已知 $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 且四边形 $ABCD$ 为直角梯形, $\angle ABC = \angle BAD = \frac{\pi}{2}$, $PA=AD=2$, $AB=BC=1$.



(1) 求平面 PAB 与平面 PCD 所成二面角的余弦值;

(2) 点 Q 是线段 BP 上的动点, 当直线 CQ 与 DP 所成的角最小时, 求线段 BQ 的长.

解 以 $\{\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AP}\}$ 为正交基底建立如图所示的空间直角坐标系 $Axyz$, 则各点的坐标为 $B(1,0,0)$, $C(1,1,0)$, $D(0,2,0)$, $P(0,0,2)$.

(1) 因为 $AD \perp$ 平面 PAB , 所以 $\vec{AD}$ 是平面 PAB 的一个法向量, $\vec{AD} = (0, 2, 0)$.

因为 $\vec{PC} = (1, 1, -2)$, $\vec{PD} = (0, 2, -2)$.

设平面 PCD 的法向量为 $\vec{m} = (x, y, z)$,

则 $\vec{m} \cdot \vec{PC} = 0$, $\vec{m} \cdot \vec{PD} = 0$, 即 $\begin{cases} x + y - 2z = 0, \\ 2y - 2z = 0. \end{cases}$

令 $y = 1$, 解得 $z = 1$, $x = 1$.

所以 $\vec{m} = (1, 1, 1)$ 是平面 PCD 的一个法向量.

从而 $\cos \langle \vec{AD}, \vec{m} \rangle = \frac{\vec{AD} \cdot \vec{m}}{|\vec{AD}| |\vec{m}|} = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

所以平面 PAB 与平面 PCD 所成二面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(2) 因为 $\vec{BP} = (-1, 0, 2)$, 设 $\vec{BQ} = \lambda \vec{BP} = (-\lambda, 0, 2\lambda) (0 \leq \lambda \leq 1)$,

又 $\vec{CB} = (0, -1, 0)$, 则 $\vec{CQ} = \vec{CB} + \vec{BQ} = (-\lambda, -1, 2\lambda)$,

又 $\vec{DP} = (0, -2, 2)$, 从而 $\cos \langle \vec{CQ}, \vec{DP} \rangle = \frac{\vec{CQ} \cdot \vec{DP}}{|\vec{CQ}| |\vec{DP}|} = \frac{1 + 2\lambda}{\sqrt{10\lambda^2 + 2}}$.

设 $1 + 2\lambda = t$, $t \in [1, 3]$,

则 $\cos^2 \langle \vec{CQ}, \vec{DP} \rangle = \frac{2t^2}{5t^2 - 10t + 9} = \frac{2}{9\left(\frac{1}{t} - \frac{5}{9}\right)^2 + \frac{20}{9}} \leq \frac{9}{10}$ 当且仅当 $t = \frac{9}{5}$,

即 $\lambda = \frac{2}{5}$ 时, $\cos \langle \vec{CQ}, \vec{DP} \rangle$ 的最大值为 $\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

因为 $y = \cos x$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上是减函数, 此时直线 CQ 与 DP 所成角取得最小值.

又因为 $BP = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$, 所以 $BQ = \frac{2}{5}BP = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

