

江苏省仪征中学 2019 届高三上学期数学(理)周末限时训练 1 (2018.9.8)

范围：集合与逻辑、函数与导数、三角函数、平面向量、复数

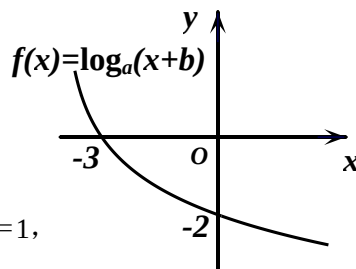
一、填空题：本大题共 14 小题，每小题 5 分，共 70 分.

1、若复数 $z = \frac{1+3i}{1-i}$ (i 为虚数单位), 则 $|z| =$ ▲.

2、已知集合 $A = \{2 + \sqrt{a}, a\}$, $B = \{-1, 1, 3\}$, 且 $A \subset B$, 则实数 a 的值是 ▲.

3、已知函数 $f(x) = \log_a(x+b)$ ($a > 0, a \neq 1, b \in \mathbb{R}$)

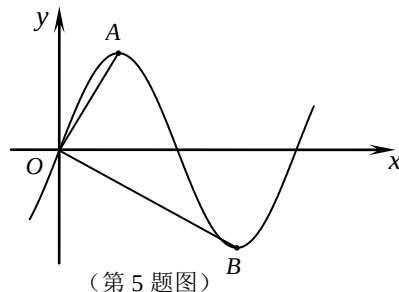
的图像如图所示, 则 $a+b$ 的值是 ▲.



4、已知向量 $\mathbf{m} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$, $\mathbf{n} = (2, 1)$, $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, 若 $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = 1$,

则 $\sin\left(2\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) =$ ▲.

5、如图, 已知 A, B 分别是函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin \omega x$ ($\omega > 0$) 在 y 轴右侧图象上的第一个最高点和第一个最低点, 且 $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$, 则该函数的周期是 ▲.



6、若命题 “ $\exists x \in \mathbb{R}$, 使得 $x^2 + (a-1)x + 1 < 0$ ” 是真命题, 则实数 a 的取值范围是 ▲.

7、已知 $f(x) = \begin{cases} 2^x - 3, & x > 0, \\ g(x), & x < 0, \end{cases}$ 是奇函数, 则 $f(g(-2)) =$ ▲.

8、已知平面向量 $\vec{a} = (2, 1)$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 10$, 若 $|\vec{a} + \vec{b}| = 5\sqrt{2}$, 则 $|\vec{b}|$ 的值是 ▲.

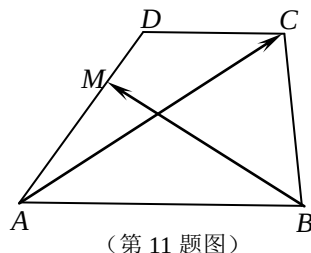
9、已知 $7^p = 2$, $7^q = 5$, 则 $\lg 2$ 用 p, q 表示为 ▲.

10、已知函数 $f(x) = x^3 - ax^2 + 4$, 若 $f(x)$ 的图象与 x 轴正半轴有两个不同的交点, 则实数 a 的取值范围为 ▲.

11、如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AB = 4$, $AD = 3$,

$CD = 2$, $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MD}$. 若 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BM} = -3$,

则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} =$ ▲.



12、已知定义在 R 上的可导函数 $y = f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$ ，满足 $f'(x) < f(x)$ ，且 $y = f(x+1)$ 为偶函数， $f(2) = 1$ ，则不等式 $f(x) < e^x$ 的解集为 ▲ 。

13、在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，且满足 $b^2 - a^2 = ac$ ，则 $\frac{1}{\tan A} - \frac{1}{\tan B}$ 的取值范围是 ▲ 。

14、已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3x, & x \leq 0, \\ e^x + e^2, & x > 0. \end{cases}$ 若不等式 $f(x) \geq kx$ 对 $x \in R$ 恒成立，则实数 k 的取值范围是 ▲ 。

二、解答题：本大题共 6 小题，共 90 分。解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤。

15、(本小题满分 14 分) 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，且 $\sin A + \cos^2 \frac{B+C}{2} = 1$ ， D 为 BC 上一点，且 $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ 。

(1) 求 $\sin A$ 的值；

(2) 若 $a = 4\sqrt{2}, b = 5$ ，求 AD 的长。

16、(本小题满分 14 分) 已知 $p: \left| 1 - \frac{x-1}{3} \right| \leq 2$ ， $q: x^2 - 2x + 1 - m^2 \leq 0 (m > 0)$ ，且 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要而不充分条件，求实数 m 的取值范围。

17、(本小题满分 14 分) 已知 $a > 0$, 函数 $f(x) = -2a \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 2a + b$, 当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, $-5 \leq f(x) \leq 1$.

(1) 求常数 a, b 的值;

(2) 设 $g(x) = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ 且 $\lg g(x) > 0$, 求 $g(x)$ 的单调区间.

18、(本小题满分 16 分) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $D = \{x | x \neq 0\}$, 且满足对于任意 $x_1, x_2 \in D$, 有 $f(x_1 x_2) = f(x_1) + f(x_2)$.

(1) 求 $f(1)$ 的值;

(2) 判断 $f(x)$ 的奇偶性并证明你的结论;

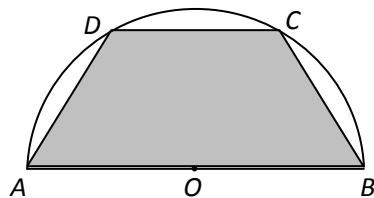
(3) 如果 $f(4) = 1$, $f(x-1) < 2$, 且 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数, 求 x 的取值范围.

19、(本小题满分 16 分) 如图所示，有一块半径长为 1 米的半圆形钢板，现要从中截取一个内接等腰梯形部件 $ABCD$ ，设梯形部件 $ABCD$ 的面积为 y 平方米.

(1)按下列要求写出函数关系式：

- ①设 $CD = 2x$ (米)，将 y 表示成 x 的函数关系式；
- ②设 $\angle BOC = \theta(\text{rad})$ ，将 y 表示成 θ 的函数关系式.

(2)求梯形部件 $ABCD$ 面积 y 的最大值.



20、(本小题满分 16 分) 已知函数 $f(x) = \frac{a}{3}x^3 - \frac{1}{2}(a+1)x^2 + x - \frac{1}{3}$ ($a \in \mathbf{R}$).

(1) 若 $a < 0$ ，求函数 $f(x)$ 的极值；

(2) 当 $a \leq 1$ 时，判断函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上零点的个数.

江苏省仪征中学 2018 届高三上学期数学(理)周末限时训练 1 答案

1、 $\sqrt{5}$; 2、1; 3、 $\frac{9}{2}$; 4、 $-\frac{7}{25}$; 5、4; 6、 $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$; 7、1;

8、5; 9、 $\frac{p}{p+q}$; 10、 $(3, +\infty)$; 11、 $\frac{3}{2}$; 12、 $(0, +\infty)$;

13、 $(1, \frac{2\sqrt{3}}{3})$; 14、 $[-3, e^2]$.

15、 解: (1) $\because \sin A + \cos^2 \frac{B+C}{2} = 1$,
 $\therefore \sin A + \frac{1 + \cos(B+C)}{2} = 1$, 即 $2 \sin A - \cos A = 1$,2 分
 $\therefore (2 \sin A - 1)^2 = \cos^2 A$, 即 $5 \sin^2 A - 4 \sin A = 0$,4 分
 $\because A \in (0, \pi)$, $\therefore \sin A > 0$,
 $\therefore \sin A = \frac{4}{5}$, $\cos A = \frac{3}{5}$6 分
(2) 在 $\triangle ABC$ 中, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$,
 $\therefore 32 = 25 + c^2 - 2 \times 5c \times \frac{3}{5}$ 即 $c^2 - 6c - 7 = 0$ 解得 $c = 7$,10 分
 $\therefore \overrightarrow{AD} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4} \overrightarrow{AC}$,
 $\therefore \overrightarrow{AD}^2 = \frac{1}{16} c^2 + \frac{9}{16} b^2 + \frac{3}{8} bc \cos A = \frac{49}{16} + \frac{9}{16} \times 25 + \frac{3}{8} \times 7 \times 5 \times \frac{3}{5} = 25$,12 分
 $\therefore AD = 5$14 分

16、解: 由 $q: x^2 - 2x + 1 - m^2 \leq 0$, 得 $1 - m \leq x \leq 1 + m$,

$\therefore \neg q: A = \{x | x > 1 + m \text{ 或 } x < 1 - m, m > 0\}$,

由 $p: \left| 1 - \frac{x-1}{3} \right| \leq 2$, 解得 $-2 \leq x \leq 10$, $\therefore \neg p: B = \{x | x > 10 \text{ 或 } x < -2\}$.

$\because \neg p$ 是 $\neg q$ 的必要而不充分条件.

$\therefore A \subsetneq B$,

$\therefore \begin{cases} m > 0 \\ 1 - m < -2 \text{ 或 } \\ 1 + m \geq 10 \end{cases} \begin{cases} m > 0 \\ 1 - m \leq -2, \text{ 即 } m \geq 9 \text{ 或 } m > 9. \therefore m \geq 9. \\ 1 + m > 10 \end{cases}$

17、解 (1) $\because x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \therefore 2x + \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right]. \therefore \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right],$ 又 $\because a > 0,$

$$\therefore -2a \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \in [-2a, a]. \therefore f(x) \in [b, 3a + b],$$

又 $\because -5 \leq f(x) \leq 1, \therefore b = -5, 3a + b = 1,$ 因此 $a = 2, b = -5.$

$$(2) \text{由(1)得 } a = 2, b = -5, \therefore f(x) = -4\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - 1,$$

$$g(x) = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -4\sin\left(2x + \frac{7\pi}{6}\right) - 1 = 4\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - 1,$$

又由 $\lg g(x) > 0,$ 得 $g(x) > 1,$

$$\therefore 4\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - 1 > 1, \therefore \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) > \frac{1}{2}, \therefore 2k\pi + \frac{\pi}{6} < 2x + \frac{\pi}{6} < 2k\pi + \frac{5\pi}{6}, k \in \mathbf{Z},$$

其中当 $2k\pi + \frac{\pi}{6} < 2x + \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$ 时, $g(x)$ 单调递增, 即 $k\pi < x \leq k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbf{Z},$

$$\therefore g(x) \text{ 的单调增区间为 } \left(k\pi, k\pi + \frac{\pi}{6}\right], k \in \mathbf{Z}.$$

又 $\because$ 当 $2k\pi + \frac{\pi}{2} < 2x + \frac{\pi}{6} < 2k\pi + \frac{5\pi}{6}, k \in \mathbf{Z}$ 时, $g(x)$ 单调递减, 即 $k\pi + \frac{\pi}{6} < x < k\pi + \frac{\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}.$

$$\therefore g(x) \text{ 的单调减区间为 } \left(k\pi + \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{\pi}{3}\right), k \in \mathbf{Z}.$$

综上, $g(x)$ 的递增区间为 $\left(k\pi, k\pi + \frac{\pi}{6}\right] (k \in \mathbf{Z});$ 递减区间为 $\left(k\pi + \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{\pi}{3}\right) (k \in \mathbf{Z}).$

18、解:(1) $\because$ 对于任意 $x_1, x_2 \in D,$ 有 $f(x_1 x_2) = f(x_1) + f(x_2), \therefore$ 令 $x_1 = x_2 = 1,$ 得 $f(1) = 2f(1), \therefore f(1) = 0.$

(2) $f(x)$ 为偶函数.

证明: 令 $x_1 = x_2 = -1,$ 有 $f(1) = f(-1) + f(-1), \therefore f(-1) = \frac{1}{2}f(1) = 0.$

令 $x_1 = -1, x_2 = x$ 有 $f(-x) = f(-1) + f(x), \therefore f(-x) = f(x), \therefore f(x)$ 为偶函数.

(3) 依题设有 $f(4 \times 4) = f(4) + f(4) = 2,$ 由(2)知, $f(x)$ 是偶函数, $\therefore f(x-1) < 2 \Leftrightarrow f(|x-1|) < f(16).$

又 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数. $\therefore 0 < |x-1| < 16,$ 解之得 $-15 < x < 17$ 且 $x \neq 1.$

$\therefore x$ 的取值范围是 $\{x | -15 < x < 17 \text{ 且 } x \neq 1\}.$

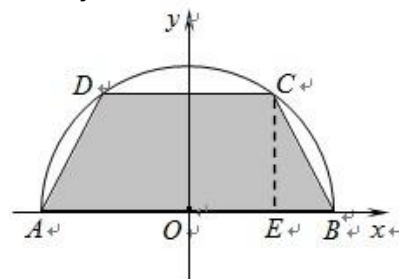
19、解: 如图所示, 以直径 AB 所在的直线为 x 轴, 线段 AB 中垂线为 y 轴, 建立平面直角坐标系, 过点 C 作 $CE \perp AB$ 于 $E,$

$$(1) \textcircled{1} \because CD = 2x, \therefore OE = x (0 < x < 1), CE = \sqrt{1-x^2}$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}(|AB| + |CD|) \cdot CE = \frac{1}{2}(2 + 2x)\sqrt{1-x^2}$$

$$= (x+1)\sqrt{1-x^2} (0 < x < 1) \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\textcircled{2} \because \angle BOC = \theta (0 < \theta < \frac{\pi}{2}), \therefore OE = \cos \theta, CE = \sin \theta,$$



$$\therefore y = \frac{1}{2}(|AB| + |CD|) \cdot CE = \frac{1}{2}(2 + 2\cos\theta)\sin\theta = (1 + \cos\theta)\sin\theta \quad (0 < \theta < \frac{\pi}{2}), \quad \dots\dots 8 \text{ 分}$$

(说明: 若函数的定义域漏写或错误, 则一个扣 1 分)

$$(2)(\text{方法 1}) \therefore y = \sqrt{(x+1)^2(1-x^2)} = \sqrt{-x^4 - 2x^3 + 2x + 1},$$

$$\text{令 } t = -x^4 - 2x^3 + 2x + 1,$$

$$\text{则 } t' = -4x^3 - 6x^2 + 2 = -2(2x^3 + 3x^2 - 1) = -2(x+1)^2(2x-1), \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{令 } t' = 0, \quad x = \frac{1}{2}, \quad x = -1(\text{舍}). \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$\therefore \text{当 } 0 < x < \frac{1}{2} \text{ 时, } t' > 0, \therefore \text{函数在 } (0, \frac{1}{2}) \text{ 上单调递增,}$$

$$\text{当 } \frac{1}{2} < x < 1 \text{ 时, } t' < 0, \therefore \text{函数在 } (\frac{1}{2}, 1) \text{ 上单调递减,} \quad \dots\dots\dots 14 \text{ 分}$$

$$\text{所以当 } x = \frac{1}{2} \text{ 时, } t \text{ 有最大值 } \frac{27}{16}, \quad y_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \quad \dots\dots\dots 16 \text{ 分}$$

答: 梯形部件 $ABCD$ 面积的最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ 平方米.

$$(\text{方法 2}) y' = \sqrt{1-x^2} + (x+1) \times \frac{1}{2} \times \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-2x^2 - x + 1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{令 } y' = 0, \therefore 2x^2 + x - 1 = 0, \quad (2x-1)(x+1) = 0, \therefore x = \frac{1}{2}, \quad x = -1(\text{舍}).$$

$$\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$\therefore \text{当 } 0 < x < \frac{1}{2} \text{ 时, } y' > 0, \therefore \text{函数在 } (0, \frac{1}{2}) \text{ 上单调递增,}$$

$$\text{当 } \frac{1}{2} < x < 1 \text{ 时, } y' < 0, \therefore \text{函数在 } (\frac{1}{2}, 1) \text{ 上单调递减,} \quad \dots\dots\dots 14 \text{ 分}$$

$$\text{所以当 } x = \frac{1}{2} \text{ 时, } y_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \quad \dots\dots\dots 16 \text{ 分}$$

答: 梯形部件 $ABCD$ 面积的最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ 平方米.

$$(\text{方法 3}) \therefore y' = [(\sin\theta + \sin\theta\cos\theta)]' = (\sin\theta)' + (\sin\theta \cdot \cos\theta)'$$

$$= \cos\theta + \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta + \cos\theta - 1, \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{令 } y' = 0, \text{ 得 } \cos\theta = \frac{1}{2}, \text{ 即 } \theta = \frac{\pi}{3}, \quad \cos\theta = -1(\text{舍}), \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$\therefore \text{当 } 0 < \theta < \frac{\pi}{3} \text{ 时, } y' > 0, \therefore \text{函数在 } (0, \frac{\pi}{3}) \text{ 上单调递增,}$$

$$\text{当 } \frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ 时, } y' < 0, \therefore \text{函数在 } (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}) \text{ 上单调递减,} \quad \dots\dots\dots 14 \text{ 分}$$

$$\text{所以当 } \theta = \frac{\pi}{3} \text{ 时, } y_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

答: 梯形部件 $ABCD$ 面积的最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ 平方米. $\dots\dots\dots 16 \text{ 分}$

20、解: (1) $f'(x) = ax^2 - (a+1)x + 1 = a(x-1)(x-\frac{1}{a})$, $\because a < 0$, $\therefore \frac{1}{a} < 1$,

x	$(-\infty, \frac{1}{a})$	$\frac{1}{a}$	$(\frac{1}{a}, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	递减	极小值	递增	极大值	递减

所以 $f(x)$ 的极小值为 $f(\frac{1}{a}) = \frac{-2a^2 + 3a - 1}{6a^2}$, 极大值为 $f(1) = -\frac{1}{6}(a-1)$.

(2) 由 (1) 得 $f'(x) = a(x-1)(x-\frac{1}{a})$,

①当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增, 在 $[1, 2]$ 上递减.

又因为 $f(1) = -\frac{1}{6}(a-1) > 0$, $f(0) = -\frac{1}{3} < 0$, $f(2) = \frac{1}{3}(2a-1) < 0$,

所以 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上有两个零点;

②当 $a = 0$ 时, $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{3}$, 在 $[0, 2]$ 上有两个零点;

③当 $0 < a \leq \frac{1}{2}$ 时, $\frac{1}{a} \geq 2$, $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增, 在 $[1, 2]$ 上递减,

又因为 $f(1) = -\frac{1}{6}(a-1) > 0$, $f(0) = -\frac{1}{3} < 0$, $f(2) = \frac{1}{3}(2a-1) \leq 0$,

所以 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上有两个零点;

④当 $\frac{1}{2} < a < 1$ 时, $1 < \frac{1}{a} < 2$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, \frac{1}{a})$ 上递减, 在 $(\frac{1}{a}, 2)$ 上递增. 又因为

$$f(1) = -\frac{1}{6}(a-1) > 0, f(0) = -\frac{1}{3} < 0, f(\frac{1}{a}) = \frac{-2a^2 + 3a - 1}{6a^2} = \frac{-(2a-1)(a-1)}{6a^2} > 0, \text{ 所以 } f(x) \text{ 在 } [0, 1]$$

上有且仅有一个零点, 在 $[1, 2]$ 上没有零点, 所以 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上有且仅有一个零点;

⑤当 $a = 1$ 时, $f'(x) \geq 0$ 恒成立, $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 单调递增,

$\because f(0) = -\frac{1}{3} < 0$, $f(2) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上有且仅有一个零点.

综上所述, 当 $\frac{1}{2} < a \leq 1$ 时, $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上有且仅有一个零点;

当 $a \leq \frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上有两个零点.