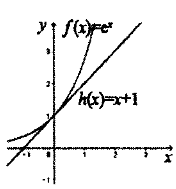
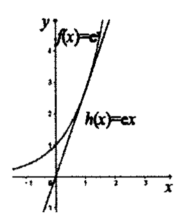
切线放缩法在不等式问题中的应用例析

安徽省太湖中学　王　芳　李昭平　（邮编：246400）

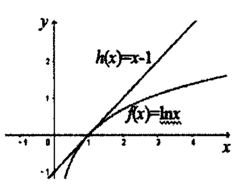
将一条曲线近似用某点的切线来代替，常常称为切线放缩法，充分体现了“以直代曲”的数学思想．在某些不等式问题中，若能活用以下切线不等式 $e^x\geqslant x+1$、$e^x\geqslant ex$、$\ln x\leqslant x-1$、$\ln x\leqslant \frac{1}{e}x$ 等进行放缩（如图所示），往往能快速实现解题目标．下面结合典型试题予以介绍，供参考[1]．



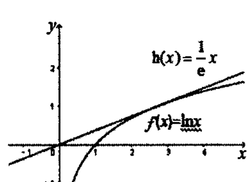
1.$e^x\geqslant x+1$



2.$e^x\geqslant ex$



3.$\ln x\leqslant x-1$



4.$\ln x\leqslant \frac{1}{e}x$

1　利用 $e^x\geqslant x+1$ 放缩

直线 $y=x+1$ 是曲线 $y=e^x$ 在 $(0,1)$ 处的切线，且在曲线 $y=e^x$ 的下方，所以有 $e^x\geqslant x+1$，当且仅当 $x=0$ 时等号成立．

例1　已知函数 $f(x)=xe^{3x}-\ln x-1$．证明：对任意实数 $x>0$，都有 $f(x)>2x$ 恒成立．

思路　变形 $xe^{3x}=e^{\ln x+3x}$，利用 $e^x\geqslant x+1$ 切线放缩 $e^{\ln x+3x}\geqslant \ln x+3x+1$，往证 $f(x)\geqslant 2x$．

解析　因为 $e^x\geqslant x+1$，所以 $e^{\ln x+3x}\geqslant \ln x+3x+1$．

于是 $f(x)=e^{\ln x+3x}-\ln x-1\geqslant \ln x+3x+1-\ln x-1=3x$，当且仅当 $\ln x+3x=0$ 时等号成立．

因为 $x>0$，所以 $3x>2x$．故对任意实数 $x>0$，都有 $f(x)>2x$ 恒成立．

说明　本题是将不等式 $e^x\geqslant x+1(x\in\mathbf{R})$ 中的 x 换为 $\ln x+3x$．若换 x 为 $f(x)$，则可以一般化为 $e^{f(x)}\geqslant f(x)+1$，扩大了应用范围．

例2　已知不等式 $e^{x-2}\geqslant x+2a-3$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，则实数 a 的最大值是______．

思路　将 $e^{x-2}\geqslant x+2a-3$ 变形为 $e^{x-2}\geqslant(x-2)+1+2a-2$ 处理．

解析　$e^{x-2}\geqslant x+2a-3$ 就是 $e^{x-2}\geqslant(x-2)+1+2a-2$，即 $2a-1\leqslant e^{x-2}-(x-2)$．

由 $e^x\geqslant x+1$ 得，$e^{x-2}\geqslant(x-2)+1$，$e^{x-2}-(x-2)\geqslant 1$，当且仅当 $x=2$ 时，$e^{x-2}-(x-2)$ 取得最小值1．因此 $2a-1\leqslant 1$，$a\leqslant 1$．故实数 a 的最大值是1．

说明　由 $e^x\geqslant x+1$，得 $e^x-x\geqslant 1$，即当 $x=0$ 时，$(e^x-x)_{\min}=1$．则 $\left[e^{x-2}-(x-2)\right]_{\min}=1$．

2　利用 $e^x\geqslant ex$ 放缩

一个角度：直线 $y=ex$ 是曲线 $y=e^x$ 在 $(1,e)$ 处的切线，且在曲线 $y=e^x$ 的下方，所以有 $e^x\geqslant ex$，当且仅当 $x=1$ 时等号成立，另一个角度：因为 $e^x\geqslant x+1$，所以 $e^{x-1}\geqslant x$，即 $e^x\geqslant ex$，当且仅当 $x=1$ 时等号成立．

例3　若函数 $f(x)=x\ln m-3e^x$ 有零点，则实数 m 的取值范围是______．

思路　将 $x\ln m-3e^x=0$“一分为二”成 $\ln m=\frac{3e^x}{x}$，研究直线 $y=\ln m$ 与函数 $\frac{3e^x}{x}$ 的图象有交点即可．

解析　因为 $f(x)==x\ln m-3e^x$ 有零点，所以方程 $x\ln m=3e^x$ 有实数根．

显然 $x=0$ 不是其根，因此 $\ln m=\frac{3e^x}{x}$．因为 $e^x\geqslant ex$，当 $x>0$ 时，$\ln m=\frac{3e^x}{x}\geqslant 3e$，得 $m\geqslant e^{3e}$．当 $x<0$ 时，$\ln m=\frac{3e^x}{x}<0$，得 $0<m<1$．

故实数 m 的取值范围是 $(0,1)\cup\left[e^{3e},+\infty\right)$．

说明　本题将 $e^x\geqslant ex$ 变形为 $\frac{e^x}{x}\geqslant e(x>0)$ 和 $\frac{e^x}{x}<0(x<0)$ 处理问题[2]．

3 利用$\ln x \leqslant x-1$放缩

直线$y=x-1$是曲线$y=\ln x$在$(1,0)$处的切线,且在曲线$y=\ln x$的上方,所以有$\ln x \leqslant x-1$,当且仅当$x=1$时等号成立.

例4 设$a \in \mathbf{R}$,函数$f(x)=\ln x-ax$.

(Ⅰ)试讨论函数$f(x)$在定义域上的单调性;

(Ⅱ)证明:对任意$x>0$,$\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^2\ln x>0$恒成立.

思路 对(Ⅰ),求导后分类讨论参数a即可;对(Ⅱ),用$\ln x \leqslant x-1$切线放缩$\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^2\ln x \geqslant \mathrm{e}^x-\mathrm{e}^2(x-1)$,再证$\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^2(x-1)\geqslant 0$.

解析 (Ⅰ)当$a \leqslant 0$时,$f(x)$在$(0,+\infty)$内单增;当$a>0$时,$f(x)$在$\left(0,\frac{1}{a}\right)$内单增,在$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$内单减.过程略去.

(Ⅱ)因为$\ln x \leqslant x-1(x>0)$,所以

$-\mathrm{e}^2\ln x \geqslant -\mathrm{e}^2(x-1)$,当且仅当$x=1$时等号成立.

于是$\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^2\ln x \geqslant \mathrm{e}^x-\mathrm{e}^2(x-1)$,当且仅当$x=1$时等号成立.

令$g(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^2(x-1)$,$x>0$, 则$g'(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^2$.当$x>2$时,$g'(x)>0$;

当$0<x<2$时,$g'(x)<0$.因此$g(x)\geqslant g(2)=0$,且$\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^2\ln x \geqslant \mathrm{e}^x-\mathrm{e}^2(x-1)\geqslant 0$中,两个等号不能同时成立.

故对任意$x>0$,$\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^2\ln x>0$恒成立.

说明 本题先利用$\ln x \leqslant x-1$切线放缩,再构造新函数处理[3].

4 利用$\ln x \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}}x$放缩

直线$y=\frac{1}{\mathrm{e}}x$是曲线$y=\ln x$在$(\mathrm{e},1)$处的切线,且在曲线的上方,所以有$\ln x \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}}x$,当且仅当$x=\mathrm{e}$时等号成立,

例5 设$t \in \mathbf{R}$,函数$f(x)=x\ln x-tx^2-x$.若函数$f(x)$在定义域内单减,则t的取值范围是________.

思路 由$f'(x)\leqslant 0$构建不等式,利用$\ln x \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}}x$放缩.

解析 由$f'(x)=1+\ln x-2tx-1=\ln x-2tx \leqslant 0$得,$\ln x \leqslant 2tx$,即$2t \geqslant \frac{\ln x}{x}$.

因为$\ln x \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}}x$,所以$\frac{\ln x}{x}\leqslant \frac{1}{\mathrm{e}}$,当且仅当$x=\mathrm{e}$时等号成立,因此$\frac{\ln x}{x}$的最大值是$\frac{1}{\mathrm{e}}$.

于是$2t \geqslant \frac{1}{\mathrm{e}}$,$t \geqslant \frac{1}{2\mathrm{e}}$ 故t的取值范围是$\left[\frac{1}{2\mathrm{e}},+\infty\right)$.

说明 若换x为$f(x)$,则$\ln x \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}}x$可以一般化为$\ln f(x)\leqslant \frac{1}{\mathrm{e}}f(x)$,扩大了应用范围[2].

5 利用$\ln x \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}}x$和$\mathrm{e}^x \geqslant \mathrm{e}x$放缩

例6 设a、$b \in \mathbf{R}$,函数$f(x)=a\mathrm{e}^x\ln x+\frac{b\mathrm{e}^{x-1}}{x}$.曲线$y=f(x)$在点$(1,2)$处的切线平行于直线$\mathrm{e}x-y+3=0$.

(Ⅰ)求实数a、b的值;(Ⅱ)证明:$f(x)>1(x>0)$.

思路 对(Ⅰ),构建方程组$f(1)=2$且$f'(1)=\mathrm{e}$处理;对(Ⅱ),利用$\ln x \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}}x$进行放缩.

解析 (Ⅰ)$a=1$,$b=2$.过程略去.

(Ⅱ)$f(x)>1(x>0)$就是$\mathrm{e}^x\ln x+\frac{2\mathrm{e}^{x-1}}{x}>1(x>0)$.

因为$\ln x \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}}x(x>0)$,所以$\ln\frac{1}{x}\leqslant \frac{1}{\mathrm{e}x}(x>0)$,即$\ln x \geqslant -\frac{1}{\mathrm{e}x}(x>0)$.

于是$\mathrm{e}^x\ln x \geqslant -\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}x}=-\frac{\mathrm{e}^{x-1}}{x}$,$\mathrm{e}^x\ln x+\frac{2\mathrm{e}^{x-1}}{x}\geqslant -\frac{\mathrm{e}^{x-1}}{x}+\frac{2\mathrm{e}^{x-1}}{x}=\frac{\mathrm{e}^{x-1}}{x}=\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}x}$.

又因为$\mathrm{e}^x \geqslant \mathrm{e}x$,所以当$x>0$时,$\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}x}\geqslant 1$,即$\mathrm{e}^x\ln x+\frac{2\mathrm{e}^{x-1}}{x}\geqslant 1$,当且仅当$x=\frac{1}{\mathrm{e}}$且$x=1$时取等号,所以$\mathrm{e}^x\ln x+\frac{2\mathrm{e}^{x-1}}{x}\geqslant 1$中的等号不可能成立.

故$f(x)>1(x>0)$.

说明　本题切线放缩不等式 $\ln x \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}}x$ 和 $\mathrm{e}^x \geqslant \mathrm{e}x$ 联用，注意等号成立的条件．

6　利用 $\mathrm{e}^x \geqslant x+1$ 和 $\ln x \leqslant x-1$ 放缩

例7　设 $m \in \mathbf{R}$，函数 $f(x)=\mathrm{e}^{2x}-\ln(2x-m)$．

（Ⅰ）设 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，求实数 m 的值，并讨论 $f(x)$ 的单调性；

（Ⅱ）当 $m \geqslant -2$ 时，证明：$f(x)>0$．

思路　对（Ⅰ），利用 $f'(0)=0$ 构建方程即可；对（Ⅱ），联用 $\mathrm{e}^x \geqslant x+1$ 和 $\ln x \leqslant x-1$ 进行切线放缩．

解析　（Ⅰ）$m=-1$，$f(x)$ 在 $(-\frac{1}{2},0)$ 内单减，在 $(0,+\infty)$ 内单增．过程略去．

（Ⅱ）因为 $\mathrm{e}^{2x} \geqslant 2x+1$（当且仅当 $x=0$ 时等号成立），$-\ln(2x-m) \geqslant -(2x-m)+1$（当且仅当 $2x-m=1$ 时等号成立）．

所以 $\mathrm{e}^{2x}-\ln(2x-m) \geqslant 2x+1-(2x-m)+1=2+m$，当且仅当 $x=0$ 且 $2x-m=1$ 时等号成立，即当且仅当 $m=-1$ 时等号成立．

因为 $m \geqslant -2$，当 $m \neq -1$ 时，$\mathrm{e}^{2x}-\ln(2x-m)>2+m \geqslant 0(2x-m>0)$；当 $m=-1$ 时，$\mathrm{e}^{2x}-\ln(2x+1)=2+m=1>0(2x+1>0)$．

故当 $m \geqslant -2$ 时，有 $f(x)>0$ 恒成立．

说明　由 $\ln x \leqslant x-1$ 得，$\ln h(x) \leqslant h(x)-1$，即 $-\ln h(x) \geqslant -h(x)+1$. 由 $\mathrm{e}^x \geqslant x+1$，得 $\mathrm{e}^{g(x)} \geqslant g(x)+1$. 两个不等式相加，得 $\mathrm{e}^{g(x)}-\ln h(x) \geqslant g(x)-h(x)+2\ (h(x)>0)$，当且仅当 $g(x)=0$ 和 $h(x)=1$ 同时成立时，取等号．

例8　（2020年山东高考题）已知函数 $f(x)=a\mathrm{e}^{x-1}-\ln x+\ln a(a>0)$．

（Ⅰ）当 $a=\mathrm{e}$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线与两坐标轴围成的三角形的面积；

（Ⅱ）若 $f(x) \geqslant 1$，求 a 的取值范围．

思路　对（Ⅰ），利用 $f'(1)$ 写切线方程，求切线在坐标轴上的截距即可；对（Ⅱ），联合利用 $\mathrm{e}^x \geqslant x+1$ 和 $\ln x \leqslant x-1$ 进行切线放缩．

解析　（Ⅰ）曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线与两坐标轴围成的三角形的面积为 $\frac{2}{\mathrm{e}-1}$. 过程略去．

（Ⅱ）因为 $\mathrm{e}^{x-1} \geqslant x$，所以 $a\mathrm{e}^{x-1} \geqslant ax$（当且仅当 $x=1$ 时等号成立）．

又因为 $\ln x \leqslant x-1$，所以 $-\ln x \geqslant 1-x$（当且仅当 $x=1$ 时等号成立），

因此 $a\mathrm{e}^{x-1}-\ln x \geqslant ax+1-x$，$a\mathrm{e}^{x-1}-\ln x+\ln a \geqslant ax+1-x+\ln a$，当且仅当 $x=1$ 时等号成立．

于是 $f(x) \geqslant 1 \Leftrightarrow ax+1-x+\ln a \geqslant 1 \Leftrightarrow (a-1)x+\ln a \geqslant 0$．

所以 $\begin{cases} a-1 \geqslant 0, \\ \ln a \geqslant 0, \end{cases}$ 解得 $a \geqslant 1$. 故 a 的取值范围是 $[1,+\infty)$．

上述8道例题，很好地体现了切线放缩法在整式函数、分式函数、指数函数、对数函数以及它们的复合型函数不等式问题中的应用．解题的关键是根据不等式的结构特点，灵活运用合适的切线不等式进行放缩，有时候需要多种切线不等式的放缩融为一体，共同发挥作用．

参考文献

1　中华人民共和国教育部．普通高中数学课程标准[M]．北京：人民教育出版社，2017.

2　李昭平．将数学高考题引入复习课堂[J]．中学数学杂志（高中），2021(3)：63－66.

3　李昭平．函数搭台　导数唱戏[J]．中学数学杂志（高中），2020(3)：31－34.

（收稿日期：2021－08－20）