

江苏省仪征中学 2019-2020 学年第一学期

高三数学周三练习 (11)

2019. 11. 27

范围：江苏高考 I 卷全部内容(除立体几何外)

一、填空题

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 2x > 0\}$, $B = \{-1, 2, 4\}$, 则 $A \cap B =$ _____.
2. 若 $z(1+2i) = 5$, i 为虚数单位, 则 z 的实部为_____.
3. 若向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 满足 $\vec{a} + \vec{b} = (3, \sqrt{3})$, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为_____.
4. 已知双曲线的渐近线方程为 $y = \pm\sqrt{2}x$, 且过点 $(1, 2)$, 则该双曲线的焦距为_____.
5. 已知集合 $A = \left\{y \left| y = 2\cos x, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right.\right\}$, 集合 $B = \{y | 0 < y < a, a > 0\}$, 若 $y \in A$ 是 $y \in B$ 的必要不充分条件, 则实数 a 的取值范围为_____.
6. 已知 $a \in \{-1, 1\}$, $b \in \{-2, -1, 1\}$, 则直线 $ax + by - 1 = 0$ 不经过第二象限的概率为_____.
7. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 4^x, & x \geq 1 \\ x+3, & x < 1 \end{cases}$, 若 $f(f(a)) = 16$, 则实数 $a =$ _____.
8. 设函数 $f(x) = \sin x$, 把 $f(x)$ 的图象向左平移 $m(0 < m < \pi)$ 个单位后, 恰为函数 $y = f'(x)$ 的图象, 则 m 的值为_____.
9. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 -2 , 且 a_2, a_4, a_5 成等比数列, 则 a_2, a_4, a_5 的公比为_____.
10. 已知点 $A(3, 0), B(0, -3)$, P 是曲线 $y = \sqrt{9-x^2}$ 上一个动点, O 为坐标原点, 则 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{BA}$ 的取值范围是_____.

11. 设 $f(x)$ 是周期为 6 的奇函数, 当 $0 < x \leq 3$ 时, $f(x) = \log_2 x - 1$, 则 $f(-8) + f(-\frac{3}{2})$ = _____.

12. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别是 F_1, F_2 , PQ 是椭圆 C 过焦点 F_2 的一条弦, $\triangle PF_1Q$ 的三边 PQ, PF_1, F_1Q 的长之比为 2: 3: 4, 则椭圆 C 的离心率为_____.

13. 已知数列 $\{a_n\}$ 是 1 为首项, 2 为公差的等差数列, $\{b_n\}$ 是 1 为首项, 2 为公比的等比数列, 设 $c_n = a_{b_n}, T_n = c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_n (n \in N^+)$, 则当 $T_n < 2020$ 时, n 的最大值是 _____.

14. 已知函数 $f(x) = \lambda \ln x + \frac{4}{x} - x, \lambda \geq 2$, 曲线 $y = f(x)$ 上总存在两点 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ 使曲线 $y = f(x)$ 在 M, N 两点处的切线互相平行, 则 $x_1 + x_2$ 的取值范围为_____.

二、解答题

15. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $(b^2 + c^2 - a^2) \tan A = bc$, $0 < A < \frac{\pi}{2}$.

(1) 求角 A ;

(2) 若 $a = \sqrt{5}$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3}{2}$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

16. 在平面直角坐标系 xOy 中, $A(1, 0)$, 先将 $\overrightarrow{OA}$ 绕原点 O 逆时针方向旋转 $\alpha (0 < \alpha < \pi)$ 得到 $\overrightarrow{OB}$, 再绕原点 O 逆时针方向旋转 $\beta (0 < \beta < \pi)$ 得到 $\overrightarrow{OC}$, 若 $\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} = (2, \sqrt{3})$.

(1) 求角 α ;

(2) 若 $\sin(\alpha - \beta) = \frac{3}{5}$, 求 $\cos(\beta + \frac{\pi}{3})$ 的值.

17. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左右焦点分别为 $F_1(-1, 0)$, $F_2(1, 0)$, $P(\frac{4}{3}, \frac{\sqrt{15}}{3})$ 是椭圆 C 上一点, 过点 F_2 作直线 F_2P 的垂线 F_2Q 交直线 $x=4$ 于点 Q .

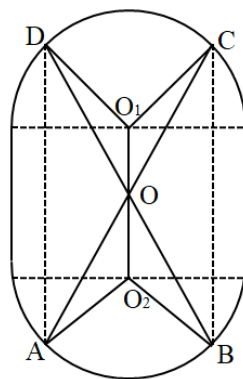
(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 求 $\triangle PF_2Q$ 外接圆方程.

18. 某种水箱用的“浮球”是由两个半球和一个圆柱筒组成, 它的轴截面如图所示. 已知半球的直径是 12cm, 圆柱筒高 6cm. 为增强该“浮球”的牢固性, 给“浮球”内置一“双蝶形”防压卡, 防压卡由金属材料杆 AC , BD , O_1C , O_1D , O_2A , O_2B 及 O_1O_2 焊接而成. 其中 O_1O_2 分别是圆柱上下底面的圆心. A , B , C , D 均在“浮球”的内壁上, AC , BD 通过“浮球”中心 O , 且 AD , BC 均与圆柱的底面垂直.

(1) 设 O_1C 与圆柱上底面所成的角为 θ , 试用 θ 表示出防压卡中四边形 O_1O_2BC 的面积 $f(\theta)$, 并写出 θ 的取值范围;

(2) 研究表明, 四边形 O_1O_2BC 的面积越大, “浮球”防压性越强, 求四边形 O_1O_2BC 面积取最大值时, 点 C 到圆柱上底面的距离 d .



19. 已知函数 $f(x) = x^3 + |3x - a|$ ($a \in \mathbb{R}$).

- (1) 当 $a=3$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调增区间;
- (2) 当 $a>3$ 时, 求函数 $f(x)$ 在 $[-2, 1]$ 上的最大值;
- (3) 对任意 $x \in [-2, 1]$, 恒有 $f(x) > a+2$, 求实数 a 的取值范围.

20. 设数列 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列, 其前 n 项和为 S_n , 若 $a_1 a_5 = 64$, $S_5 - S_3 = 48$.

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) 对于正整数 k, m, l ($k < m < l$), 求证: “ $m = k+1$ 且 $l = k+3$ ” 是 “ $5a_k, a_m, a_l$ 这三项经适当排序后能构成等差数列” 成立的充要条件;
- (3) 设数列 $\{b_n\}$ 满足: 对任意的正整数 n , 都有 $a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + a_3 b_{n-2} + \cdots + a_n b_1 = 3 \cdot 2^{n+1} - 4n - 6$, 且集合 $M = \left\{ n \mid \frac{b_n}{a_n} \geq \lambda, n \in \mathbb{N}^* \right\}$ 中有且仅有 3 个元素, 试求 λ 的取值范围.

参考答案

1. $\{-1, 4\}$ 2. 1 3. $\frac{\pi}{3}$ 4. $2\sqrt{3}$ 5. $(0, 2)$ 6. $\frac{1}{3}$ 7. -1

8. $\frac{\pi}{2}$ 9. $\frac{1}{2}$ 10. $[-9, 9\sqrt{2}]$ 11. 1 12. $\frac{1}{2}$ 13. 9 14. $(8, +\infty)$

15.

解: (1) $\because (b^2 + c^2 - a^2) \sin A = bc$

$$\therefore \frac{b^2 + c^2 - a^2}{bc} = \frac{1}{\sin A}$$

又 $\because$ 余弦定理得: $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$$\therefore 2 \cos A = \frac{1}{\sin A}$$

$$\therefore \sin 2A = 2 \sin A \cos A = 1$$

$$\because 0 < A < \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore 0 < 2A < \pi$$

$$\therefore 2A = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore A = \frac{\pi}{4}$$

(2) 由余弦定理得: $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

又 $\because A = \frac{\pi}{4}, a = \sqrt{5}$

$$\therefore \cos \frac{\pi}{4} = \frac{b^2 + c^2 - 5}{2bc} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore b^2 + c^2 - 5 = \sqrt{2}bc \text{ ----- ①}$$

$$\because S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \frac{1}{2} bc \sin \frac{\pi}{4} = \frac{3}{2}, \text{ 即 } bc = 3\sqrt{2} \text{ ---- ②}$$

由①②得:

$$(b+c)^2 = b^2 + c^2 + 2bc$$

$$= \sqrt{2}bc + 5 + 2bc$$

$$= (\sqrt{2} + 2) \times 3\sqrt{2} + 5 = 11 + 6\sqrt{2}$$

$$= (3 + \sqrt{2})^2$$

$$\therefore b+c = 3 + \sqrt{2}$$

$$\triangle ABC \text{ 的周长为 } a+b+c = 3 + \sqrt{2} + \sqrt{5}$$

16.

解: (1) $\because A(1,0), \therefore \overrightarrow{OA} = (1,0)$

$\therefore$ 将 $\overrightarrow{OA}$ 绕原点逆时针旋转 $\alpha (0 < \alpha < \pi)$ 得到

$\overrightarrow{OB}$

$\therefore B(\cos \alpha, \sin \alpha)$, 则 $\overrightarrow{OB} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$

$\therefore \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} = (1 + 2\cos \alpha, 2\sin \alpha)$

$\therefore \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} = (2, \sqrt{3})$

$$\therefore \begin{cases} 1 + 2\cos \alpha = 2 \\ 2\sin \alpha = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \frac{1}{2} \\ \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$\because 0 < \alpha < \pi, \therefore \alpha = \frac{\pi}{3}$

(2) $\because 0 < \beta < \pi$

$$\therefore \alpha - \beta = \frac{\pi}{3} - \beta \in \left(-\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\text{又 } \sin(\alpha - \beta) = \frac{3}{5}, \text{ 即 } \sin\left(\frac{\pi}{3} - \beta\right) = \frac{3}{5}$$

$$\therefore \frac{\pi}{3} - \beta \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\therefore \cos\left(\frac{\pi}{3} - \beta\right) = \sqrt{1 - \sin^2\left(\frac{\pi}{3} - \beta\right)} = \frac{4}{5}$$

$$\therefore \cos\left(\beta + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left[\frac{2\pi}{3} - \left(\frac{\pi}{3} - \beta\right)\right]$$

$$= \cos \frac{2\pi}{3} \cos\left(\frac{\pi}{3} - \beta\right) + \sin \frac{2\pi}{3} \sin\left(\frac{\pi}{3} - \beta\right)$$

$$= -\frac{1}{2} \times \frac{4}{5} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{3\sqrt{3} - 4}{10}$$

17.

解: (1) 设 $a^2 + b^2 = c^2$

$\because F_1(-1,0), \therefore c = 1$

$\therefore b^2 = a^2 - 1$, 将 P 代入

$$\frac{9}{16a^2} + \frac{9}{15(a^2 - 1)} = 1$$

$\therefore a^2 = 4, b^2 = 3$

$$\therefore C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$$

解 2, 设 $PF_2 = \frac{\sqrt{5}}{4} = \sqrt{15}$

$$\therefore k_{F_1Q} = -\frac{\sqrt{15}}{15}$$

$$\text{即 } k_{F_1Q}: y = -\frac{\sqrt{15}}{15}(x-1)$$

$$\text{当 } x = 4 \text{ 时, } y = -\frac{\sqrt{15}}{5}$$

$$\therefore Q\left(4, -\frac{\sqrt{15}}{5}\right)$$

$\therefore$ 设 PQ 中点为 Z

$$Z\left(\frac{4\sqrt{3}}{2}, \frac{\frac{\sqrt{15}}{3} + \frac{3\sqrt{3}}{5}}{2}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{8}{3}, \frac{4\sqrt{45}}{15}\right)$$

$\therefore$ 为有面的解

$$PQ = 2r = \sqrt{\left(\frac{4}{3} - 2\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{15}}{3} - \frac{\sqrt{15}}{5}\right)^2}$$

$$\therefore r = \frac{2\sqrt{10}}{15}$$

$\therefore$ 外接圆理

$$\left(x - \frac{8}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{4\sqrt{15}}{15}\right)^2 = \frac{8}{45}$$

18.

解：(1) 在 $\triangle O_1HC$ 中

$$HC = O_1C \cdot \sin \angle CO_1H = 6 \sin \theta \text{ cm}$$

$$O_1H = O_1C \cdot \cos \angle CO_1H = 6 \cos \theta \text{ cm}$$

$$\therefore BC = 2CH + O_1O = 12 \sin \theta + 6 \text{ cm}$$

$$f(\theta) = \frac{1}{2} (BC + O_1O) \cdot O_1H$$

$$= \frac{1}{2} (12 \sin \theta + 12) \cdot 6 \cos \theta$$

$$= 36(\sin \theta + 1) \cos \theta \text{ cm}^2, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$(2) f'(\theta) = 36 \cos^2 \theta - 36 \sin^2 \theta - 36 \sin \theta$$

$$= 36 - 72 \sin^2 \theta - 36 \sin \theta$$

$$= 36(-2 \sin \theta + 1)(\sin \theta + 1), \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\text{令 } f'(\theta) = 0 \text{ 得, } \theta = \frac{\pi}{6}$$

当 $0 \leq \theta < \frac{\pi}{6}$ 时, $f'(\theta) > 0$, $f(\theta)$ 单调递增.

当 $\frac{\pi}{6} < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 时, $f'(\theta) < 0$, $f(\theta)$ 单调递减.

$\therefore$ 当 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 时, $f(\theta)$ 取得最大值.

$$d = CH = 6 \sin \frac{\pi}{6} = 3 \text{ cm}$$

$$\text{答: (1) } f(\theta) = 36(\sin \theta + 1) \cos \theta \text{ cm}^2,$$

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

(2) 点 C 到圆柱上底面的距离 $d = 3 \text{ cm}$.

20. 解：(1) $\because$ 数列 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列, $\therefore a_1 a_5 = a_3^2 = 64$, $\therefore a_3 = 8$,

又 $\because S_5 - S_3 = 48$, $\therefore a_4 + a_5 = 8q^2 + 8q = 48$, $\therefore q = 2$,
 $\therefore a_n = 8 \cdot 2^{n-3} = 2^n$; 4 分

(2) (i) 必要性: 设 $5a_k, a_m, a_l$ 这三项经适当排序后能构成等差数列,

$$\text{①若 } 2 \cdot 5a_k = a_m + a_l, \text{ 则 } 2 \cdot 2^{k+2} = 2^m + 2^l, \therefore 10 = 2^{m-k} + 2^{l-k}, \therefore 5 = 2^{m-k-1} + 2^{l-k-1},$$

$$\therefore \begin{cases} 2^{m-k-1} = 1 \\ 2^{l-k-1} = 4 \end{cases}, \therefore \begin{cases} m = k+1 \\ l = k+3 \end{cases} \quad \text{..... 6 分}$$

②若 $2a_m = 5a_k + a_l$, 则 $2 \cdot 2^m = 5 \cdot 2^k + 2^l$, $\therefore 2^{m+1-k} - 2^{l-k} = 5$, 左边为偶数, 等式不成立,

③若 $2a_l = 5a_k + a_m$, 同理也不成立,

综合①②③, 得 $m = k+1, l = k+3$, 所以必要性成立.8 分

(ii) 充分性: 设 $m = k+1, l = k+3$,

则 $5a_k, a_m, a_l$ 这三项为 $5a_k, a_{k+1}, a_{k+3}$, 即 $5a_k, 2a_k, 8a_k$, 调整顺序后易知 $2a_k, 5a_k, 8a_k$ 成等差数列,

所以充分性也成立.

综合 (i) (ii), 原命题成立.10 分

(3) 因为 $a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + a_3 b_{n-2} + \cdots + a_n b_1 = 3 \cdot 2^{n+1} - 4n - 6$,

$$\text{即 } 2^1 b_n + 2^2 b_{n-1} + 2^3 b_{n-2} + \cdots + 2^n b_1 = 3 \cdot 2^{n+1} - 4n - 6, (*)$$

∴ 当 $n \geq 2$ 时, $2^1 b_{n-1} + 2^2 b_{n-2} + 2^3 b_{n-3} + \cdots + 2^{n-1} b_1 = 3 \cdot 2^n - 4n - 2$, (**)

则 (**) 式两边同乘以 2, 得 $2^2 b_{n-1} + 2^3 b_{n-2} + 2^4 b_{n-3} + \cdots + 2^n b_1 = 3 \cdot 2^{n+1} - 8n - 4$, (***)

∴ (*) - (**), 得 $2b_n = 4n - 2$, 即 $b_n = 2n - 1 (n \geq 2)$,

又当 $n=1$ 时, $2b_1 = 3 \cdot 2 - 10 = -4$, 即 $b_1 = 1$, 适合 $b_n = 2n - 1 (n \geq 1)$,

∴ $b_n = 2n - 1$14 分

$$\therefore \frac{b_n}{a_n} = \frac{2n-1}{2^n}, \therefore \frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}} = \frac{2n-1}{2^n} - \frac{2n-3}{2^{n-1}} = \frac{5-2n}{2^n},$$

$$\therefore n=2 \text{ 时, } \frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}} > 0, \text{ 即 } \frac{b_2}{a_2} > \frac{b_1}{a_1};$$

$$\therefore n \geq 3 \text{ 时, } \frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}} < 0, \text{ 此时 } \left\{ \frac{b_n}{a_n} \right\} \text{ 单调递减,}$$

$$\text{又 } \frac{b_1}{a_1} = \frac{1}{2}, \frac{b_2}{a_2} = \frac{3}{4}, \frac{b_3}{a_3} = \frac{5}{8}, \frac{b_4}{a_4} = \frac{7}{16}, \therefore \frac{7}{16} < \lambda \leq \frac{1}{2}. \quad \text{.....16 分}$$

19

解: (1) 当 $a=3$ 时, $f(x) = x^3 + |3x-3|$

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 3 - 3x, & x \leq 1 \\ x^3 + 3x - 3, & x > 1 \end{cases}$$

当 $x \leq 1$ 时, $f'(x) = 3x^2 - 3$ 令 $f'(x) = 0$ 得 $x_1 = -1, x_2 = 1$

且当 $x < -1$ 时, $f'(x) > 0, f(x)$ 单调递增;

当 $-1 < x \leq 1$ 时, $f'(x) \leq 0, f(x)$ 单调递减.

当 $x > 1$ 时, $f'(x) = 3x^2 + 3 > 0, f(x)$ 单调递增

∴ $f(x)$ 的单调区间为 $(-\infty, -1), (1, +\infty)$

(2) 当 $a > 3$ 时 $\because 3x < a \therefore f(x) = x^3 + a - 3x$

∴ $f'(x) = 3x^2 - 3$ 令 $f'(x) = 0$ 得 $x_1 = -1, x_2 = 1$

且当 $-2 \leq x < -1$ 时, $f'(x) > 0, f(x) \nearrow$; 当 $-1 < x \leq 1$ 时, $f'(x) < 0, f(x) \searrow$

∴ $f(x)_{\max} = f(-1) = -1 + a + 3 = 2 + a$

(3) $\because$ 对任意 $x \in [-2, 1]$ 恒有 $x^3 + |3x-a| > a+2 \therefore \begin{cases} -8 + |6+a| > a+2 \Rightarrow a < -8 \\ 1 + |3-a| > a+2 \Rightarrow a < 1 \end{cases} \Rightarrow a < -8$

当 $a < -8$ 时, $f(x) = x^3 + |3x-a| = x^3 + 3x - a$

$$f(x) - (a+2) = x^3 + 3x - 2a - 2$$

此时 $\begin{cases} > x^3 + 3x + 14 \\ \geq -8 - 6 + 14 \end{cases}$

满足条件 综上: $a < -8$.