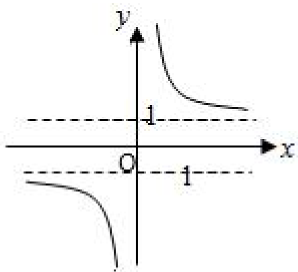
期中综合小练 (2)

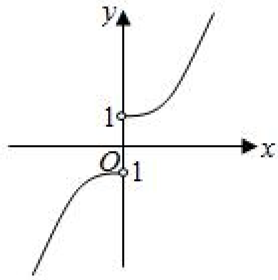
一、选择题

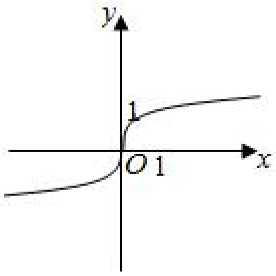
1．幂函数 $f(x)=(m^2-m-1)x^{m^2+2m-3}$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，则 m 的取值是(　　　)

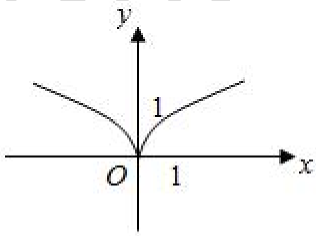
A．$m=2$ 或 $m=-1$　　B. $m=-1$　　C. $m=2$　　D. $-3\le m\le 1$

2. 函数 $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$ 的图象大致为（　　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

3. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}(1-3a)x+10a, x\le 7\\ a^{x-7}\qquad\qquad\quad ,x>7\end{cases}$ 是定义域上的减函数，则实数 a 的取值范围是(　　).

A. $(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2})$　　　　B. $(\dfrac{1}{3},\dfrac{6}{11}]$

C. $[\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3})$　　　　D. $(\dfrac{1}{2},\dfrac{6}{11}]$

4. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数，且在区间 $[0,+\infty)$ 上是减函数，若实数 a 满足 $f(\log_2 a)+f(\log_{\frac{1}{2}} a)\le 2f(1)$，则 a 的取值范围是(　　　)

A．$[2,+\infty)$　　　　B. $(-\infty,\dfrac{1}{2}]\cup[2,+\infty)$

C．$(\dfrac{1}{2},2]$　　　　D. $(0,\dfrac{1}{2}]\cup[2,+\infty)$

二、填空题

5．函数 $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(x-1)}$ 的定义域是________________.

6．若 $(3-2a)^{-1}<(2a+1)^{-1}$，则实数 a 的取值范围是____________________.

7. 函数 $y=\log_3(-x^2+x+6)$ 的单调递减区间是___________________.

8. 已知函数 $f(x)$ 是 R 上的单调增函数，且对任意 $x\in R$ 都有 $f[f(x)-3^x]=4$，则 $f(2)=$__________.

三、解答题

9．设函数 $f(x)=\begin{cases}(\frac{1}{2})^x-3, & x<0\\ \sqrt{x}, & x\geq 0\end{cases}$

（1）求满足条件 $f(x)<1$ 的实数 x 的集合 A；

（2）若集合 $B=\left\{x\,|\,2a\leq x\leq a+1\right\}$，且 $A\cup B=A$，求 a 的取值范围.

10. 已知 $f(x)=\log_a \dfrac{1+x}{1-x}(a>0,a\neq 1)$

（1）求 $f(x)$ 的定义域；

（2）判断 $f(x)$ 的奇偶性并予以证明；

（3）求使 $f(x)>0$ 的 x 取值范围.

11. 非零函数 $f(x)$ 对任意实数 a,b 均有 $f(a+b)=f(a)\cdot f(b)$，且当 $x<0$ 时，$f(x)>1$.

（1）求证：$f(x)>0$；

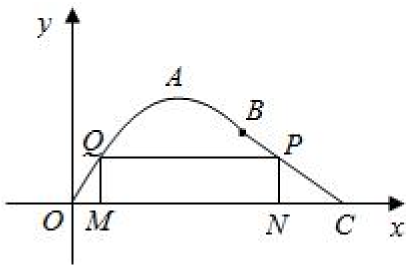
（2）求证：$f(x)$ 为减函数；

（3）当 $f(4)=\dfrac{1}{16}$ 时，解不等式 $f(x^2+x-3)\cdot f(5-x^2)\leq \dfrac{1}{4}$.

12．如图，在长为 10 千米的河流OC的一侧有一条观光带，观光带的前一部分为曲线段OAB，设曲线段OAB为函数$y=ax^2+bx+c(a\neq 0),x\in[0,6]$（单位：千米）的图象，且图象的最高点为$(4,4)$；观光带的后一部分为线段$BC$．

（1）求函数为曲线段$OABC$的函数$y=f(x),x\in[0,10]$的解析式；

（2）若计划在河流OC和观光带$OABC$之间新建一个如图所示的矩形绿化带$MNPQ$，绿化带由线段MQ,QP,PN构成，其中点P在线段BC上．当OM长为多少时，绿化带的总长度最长？



综合小练 (2) 答案解析

1. 【答案】C
2. 【答案】A
3. 【答案】B
4. 【答案】D
5. 【答案】$(1,2]$
6. 【答案】$(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})\cup(\frac{3}{2},+\infty)$
7. 【答案】$[\frac{1}{2},3)$
8. 【答案】10

9．解答：（1）由$\begin{cases} x<0 \\ (\frac{1}{2})^x-3<1 \end{cases}$或$\begin{cases} x\geq 0 \\ \sqrt{x}<1 \end{cases}$

解得$-2<x<0$或$0\leq x<1$.

$\therefore A=(-2,1)$.

(2)由$A\cup B=A$，可知$B\subseteq A$，

①当$B=\Phi$时，$2a>a+1$，$\therefore a>1$，满足题意；

②当$B\neq\Phi$时，$\begin{cases} 2a\leq a+1 \\ 2a>-2 \\ a+1<1 \end{cases}$，解得$-1<a<0$.

综上得，$a\in(-1,0)\cup(1,+\infty)$.

10. 解：（1）由对数函数的定义知$\frac{1+x}{1-x}>0$，如果$\begin{cases} 1+x>0 \\ 1-x>0 \end{cases}$，则$-1<x<1$；

如果$\begin{cases} 1+x<0 \\ 1-x<0 \end{cases}$，则不等式组无解，故$f(x)$的定义域为$(-1,1)$

（2）因为$f(-x)=\log_a\frac{1-x}{1+x}=-\log_a\frac{1+x}{1-x}=-f(x)$

所以$f(x)$为奇函数.

（3）（i）对$a>1$，$\log_a\frac{1+x}{1-x}>0$等价于$\frac{1+x}{1-x}>1$，解得$0<x<1$

（ii 对$0<a<1$，$\log_a\frac{1+x}{1-x}>0$等价于$0<\frac{1+x}{1-x}<1$，解得$-1<x<0$

故当$a>1$时，解集为$(0,1)$；当$0<a<1$时，解集为$(-1,0)$。

11. (1)证明　$f(x)=f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)=f^2\left(\frac{x}{2}\right)\geqslant 0$，

又∵$f(x)\neq 0$，∴$f(x)>0$.

(2)证明　设 $x_1<x_2$，则 $x_1-x_2<0$.

又∵$f(x)$为非零函数，且当 $x<0$ 时，$f(x)>1$，

∴$f(x_1-x_2)=\frac{f(x_1-x_2)\cdot f(x_2)}{f(x_2)}=\frac{f(x_1-x_2+x_2)}{f(x_2)}=\frac{f(x_1)}{f(x_2)}>1$，由(1)易得 $f(x_1)>f(x_2)$，

∴$f(x)$为减函数.

(3)解：由 $f(4)=f^2(2)=\frac{1}{16}$，且 $f(x)>0$，得 $f(2)=\frac{1}{4}$.

原不等式转化为 $f(x^2+x-3+5-x^2)\leqslant f(2)$，

即 $f(x+2)\leqslant f(2)$.

结合(2)得 $x+2\geqslant 2$，∴$x\geqslant 0$，

故不等式的解集为 $\{x|x\geqslant 0\}$.

12. 解：（1）因为曲线段 OAB 过点 O,且最高点为 $(4,4)$,所以 $\begin{cases} c=0 \\ 16a+4b+c=4 \\ -\frac{b}{2a}=4 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} a=-\frac{1}{4} \\ b=2 \\ c=0 \end{cases}$

所以,当 $x\in[0,6]$ 时，$y=-\frac{1}{4}x^2+2x$

因为后一部分为线段 BC,$B(6,3)$,$C(10,0)$,当 $x\in[6,10]$ 时，$y=-\frac{3}{4}x+\frac{15}{2}$

综上, $f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{4}x^2+2x, x\in[0,6] \\ -\frac{3}{4}x+\frac{15}{2}, x\in[6,10] \end{cases}$

（2）设 $OM=t(0<t\leq 2)$，则 $MQ=-\frac{1}{4}t^2+2t, PN=-\frac{1}{4}t^2+2t$

由 $PN=-\frac{1}{4}t^2+2t=-\frac{3}{4}x+\frac{15}{2}$ 得 $x=\frac{1}{3}t^2-\frac{8}{3}t+10$

所以点 $N(\frac{1}{3}t^2-\frac{8}{3}t+10,0)$

所以,绿化带的总长度 $y=MQ+QP+PN=2(-\frac{1}{4}t^2+2t)+(\frac{1}{3}t^2-\frac{11}{3}t+10)=-\frac{1}{6}t^2+\frac{1}{3}t+10$

当 $t=1$ 时, $y_{\max}=\frac{61}{6}$

所以,当 OM 长为 1 千米时,绿化带的总长度最长.