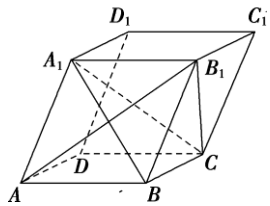
江苏省仪征中学 2019-2020 学年第一学期高三数学

中档大题训练（12）　　12.20

班级 ______________　　　　　　　　姓名______________

1．在平行六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=AB$，$AB_1\perp B_1C_1$.



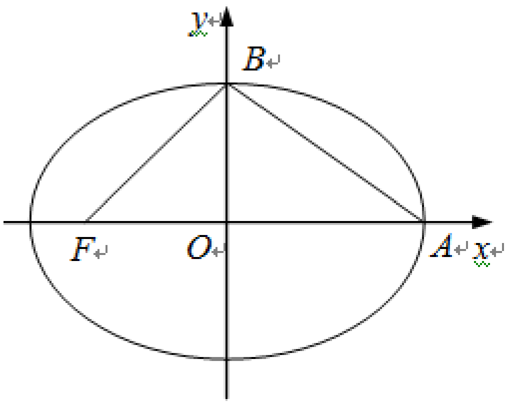
求证：(1)$AB\parallel$ 平面 A_1B_1C；

(2)平面 $ABB_1A_1\perp$ 平面 A_1BC.

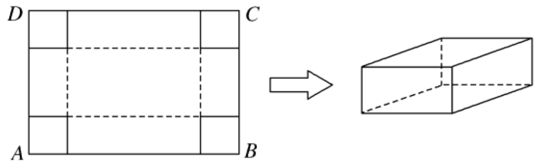
2．如图，在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的左焦点为 F ，右顶点为 A ，上顶点为 B ．

（1）已知椭圆的离心率为 $\frac{1}{2}$ ，线段 AF 中点的横坐标为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，求椭圆的标准方程；

（2）已知△ABF 外接圆的圆心在直线 $y=-x$ 上，求椭圆的离心率 e 的值．



3．在一张足够大的纸板上截取一个面积为3 600平方厘米的矩形纸板$ABCD$，然后在矩形纸板的四个角上切去边长相等的小正方形，再把它的边沿虚线折起，做成一个无盖的长方体纸盒(如图)．设小正方形边长为 x 厘米，矩形纸板的两边 AB，BC 的长分别为 a 厘米和 b 厘米，其中 $a \geqslant b$.



图①　　图②

(1)当$a=90$时，求纸盒侧面积的最大值；

(2)试确定a，b，x的值，使得纸盒的体积最大，并求出最大值．

4．已知$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$都是各项不为零的数列，且满足 $a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=c_nS_n$，$n\in\mathbf{N}^*$，其中$S_n$是数列$\{a_n\}$的前$n$项和，$\{c_n\}$是公差为$d(d\neq0)$的等差数列．

(1)若数列$\{a_n\}$是常数列，$d=2$，$c_2=3$，求数列$\{b_n\}$的通项公式；

(2)若$a_n=\lambda n$(λ是不为零的常数)，求证：数列$\{b_n\}$是等差数列；

(3)若$a_1=c_1=d=k$(k为常数，$k\in\mathbf{N}^*$)，$b_n=c_{n+k}(n\geqslant2，n\in\mathbf{N}^*)$，求证：对任意的$n\geqslant2$，$n\in\mathbf{N}^*$，数列$\left\{\frac{b_n}{a_n}\right\}$单调递减．

江苏省仪征中学 2019-2020 学年第一学期高三数学
中档大题训练（12）答案　　12.20

1、略

2、（1）因为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$，

所以 $\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，则 $a=2c$．

因为线段 AF 中点的横坐标为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以 $\frac{a-c}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$．

所以 $c=\sqrt{2}$，则 $a^2=8$， $b^2=a^2-c^2=6$．

所以椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{6}=1$．　………………………4 分

（2）因为 $A(a,0)$，$F(-c,0)$ ，

所以线段 AF 的中垂线方程为： $x=\frac{a-c}{2}$ ．

又因为 $\triangle ABF$ 外接圆的圆心 C在直线 $y=-x$ 上，

所以 $C(\frac{a-c}{2},-\frac{a-c}{2})$ ．…………………………6分

因为 $A(a,0)$，$B(0,b)$ ，

所以线段 AB 的中垂线方程为： $y-\frac{b}{2}=\frac{a}{b}(x-\frac{a}{2})$ ．

由 C在线段 AB 的中垂线上，得 $-\frac{a-c}{2}-\frac{b}{2}=\frac{a}{b}(\frac{a-c}{2}-\frac{a}{2})$ ，

整理得， $b(a-c)+b^2=ac$ ，………………………10分

即$(b-c)(a+b)=0$.

因为$a+b>0$ ，所以$b=c$. ………………………12分

所以椭圆的离心率$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{c}{\sqrt{b^2+c^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. ……………14分

3、**解**：(1)因为矩形纸板$ABCD$的面积为3 600，

故当$a=90$时，$b=40$，

从而包装盒子的侧面积

$S=2\times x(90-2x)+2\times x(40-2x)$

$=-8x^2+260x$，$x\in(0,20)$.

因为$S=-8x^2+260x=-8(x-16.25)^2+2\,112.5$，

故当$x=16.25$时，纸盒侧面积最大，最大值为2 112.5平方厘米.

(2)包装盒子的体积$V=(a-2x)(b-2x)x=x[ab-2(a+b)x+4x^2]$，$x\in\left(0,\dfrac{b}{2}\right)$，$b\leqslant 60$.

$V=x[ab-2(a+b)x+4x^2]\leqslant x(ab-4\sqrt{ab}x+4x^2)$

$=x(3\,600-240x+4x^2)=4x^3-240x^2+3\,600x$，

当且仅当$a=b=60$时等号成立.

设$f(x)=4x^3-240x^2+3\,600x$，$x\in(0,30)$.

则$f'(x)=12(x-10)(x-30)$.

于是当$0<x<10$时，$f'(x)>0$，所以$f(x)$在$(0,10)$上单调递增；

当$10<x<30$时，$f'(x)<0$，所以$f(x)$在$(10,30)$上单调递减.

因此当$x=10$时，$f(x)$有最大值$f(10)=16\,000$，此时$a=b=60$，$x=10$.

答：当$a=b=60$，$x=10$时纸盒的体积最大，最大值为16 000立方厘米.

4、(1)解　因为$d=2$，$c_2=3$，所以$c_n=2n-1$.

因为数列$\{a_n\}$是各项不为零的常数列，

所以$a_1=a_2=\cdots=a_n$，$S_n=na_1$.

则由$c_nS_n=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$及$c_n=2n-1$，得

$n(2n-1)=b_1+b_2+\cdots+b_n$，

当$n\geqslant 2$时，$(n-1)(2n-3)=b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}$，

两式相减得 $b_n=4n-3$，$n\geqslant 2$.

当 $n=1$ 时，$b_1=1$ 也满足 $b_n=4n-3$.

故 $b_n=4n-3(n\in\mathbf{N}^*)$.

(2)**证明** 因为 $a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=c_nS_n$，

当 $n\geqslant 2$ 时，$c_{n-1}S_{n-1}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_{n-1}b_{n-1}$，

两式相减得 $c_nS_n-c_{n-1}S_{n-1}=a_nb_n$，

即$(S_{n-1}+a_n)c_n-S_{n-1}c_{n-1}=a_nb_n$，

$S_{n-1}(c_n-c_{n-1})+a_nc_n=a_nb_n$，

所以 $S_{n-1}d+\lambda nc_n=\lambda nb_n$.

又 $S_{n-1}=\frac{\lambda+\lambda(n-1)}{2}(n-1)=\frac{\lambda n(n-1)}{2}$，

所以$\frac{\lambda n(n-1)}{2}d+\lambda nc_n=\lambda nb_n$，

即$\frac{n-1}{2}d+c_n=b_n$，(*)

所以当 $n\geqslant 3$ 时，$\frac{n-2}{2}d+c_{n-1}=b_{n-1}$，

两式相减得 $b_n-b_{n-1}=\frac{3}{2}d(n\geqslant 3)$，

所以数列$\{b_n\}$从第二项起是公差为$\frac{3}{2}d$的等差数列.

又当 $n=1$ 时，由 $c_1S_1=a_1b_1$，得 $c_1=b_1$.

当 $n=2$ 时，由(*)得

$b_2=\frac{(2-1)}{2}d+c_2=\frac{1}{2}d+(c_1+d)=b_1+\frac{3}{2}d$，

得 $b_2-b_1=\frac{3}{2}d$.

故数列$\{b_n\}$是公差为$\frac{3}{2}d$的等差数列.

(3)**证明** 由(2)得当 $n\geqslant 2$ 时，

$S_{n-1}(c_n-c_{n-1})+a_nc_n=a_nb_n$，

即 $S_{n-1}d=a_n(b_n-c_n)$.

因为 $b_n=c_{n+k}$，所以 $b_n=c_n+kd$，

即 $b_n-c_n=kd$，

所以 $S_{n-1}d=a_n\cdot kd$，

即 $S_{n-1}=ka_n$，

所以 $S_n=S_{n-1}+a_n=(k+1)a_n$.

当 $n\geqslant 3$ 时，$S_{n-1}=(k+1)a_{n-1}$，

两式相减得 $a_n=(k+1)a_n-(k+1)a_{n-1}$，

即 $a_n=\frac{k+1}{k}a_{n-1}$，

故从第二项起数列$\{a_n\}$是等比数列，

所以当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=a_2\left(\frac{k+1}{k}\right)^{n-2}$，

$b_n=c_{n+k}=c_n+kd=c_1+(n-1)k+k^2$

$=k+(n-1)k+k^2=k(n+k)$，

另外由已知条件得$(a_1+a_2)c_2=a_1b_1+a_2b_2$.

又 $c_2=2k$，$b_1=k$，$b_2=k(2+k)$，

所以 $a_2=1$，因而 $a_n=\left(\frac{k+1}{k}\right)^{n-2}$，$n\geqslant 2$.

令 $d_n=\frac{b_n}{a_n}(n\geqslant 2)$，则$\frac{d_{n+1}}{d_n}=\frac{b_{n+1}a_n}{a_{n+1}b_n}=\frac{(n+k+1)k}{(n+k)(k+1)}$.

因为$(n+k+1)k-(n+k)(k+1)=-n<0$，

所以$\frac{d_{n+1}}{d_n}<1$，

又因为 $d_n>0$，所以 $d_{n+1}<d_n$，

所以对任意的 $n\geqslant 2$，$n\in\mathbf{N}^*$，数列$\left\{\frac{b_n}{a_n}\right\}$单调递减.