研究中考命题　实施精准复习

——由一道试题的分析反思中考数学复习教学

潘丽莎　李瑞东　(江苏省徐州市开发区中学　221000)

每年的中考试卷中都会出现一些创新的优秀题目,尤其最后两道承载着选拔功能,试题的命制必须具有一定的综合性与区分度.深入研究这些中考题,对提高教师的解题能力、对教材的理解能力等都有重要的作用,尤其对初三教师的中考复习起到指导作用.下面通过对一道中考压轴题的研究,来谈谈如何透过中考题指导复习教学.

1　试题呈现

试题　(2019·徐州)如图 1,平面直角坐标系中,O 为原点,点 A,B 分别在 y 轴、x 轴的正半轴上.$\triangle AOB$ 的两条外角平分线交于点 P,P 在反比例函数 $y=\frac{9}{x}$ 的图象上,PA 的延长线交 x 轴于点 C,PB 的延长线交 y 轴于点 D,连结 CD.

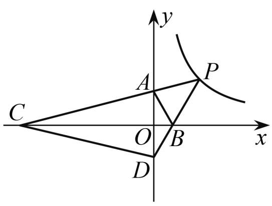

图 1

(1)求 $\angle P$ 的度数及点 P 的坐标.

(2)求 $\triangle OCD$ 的面积.

(3)$\triangle AOB$ 的面积是否存在最大值?若存在,求出最大面积;若不存在,请说明理由.

2　试题剖析

· 第(1)问解析

$P(3,3)$.解略.

评析　对于第(1)问,根据角平分线的定义和直角三角形两个内角互余,得到了 $\angle PAB$ 和 $\angle PBA$ 之和为定值,从而化动为静,对题目进行求解,得到了 $\angle P$ 的度数为 $45°$.紧接着利用角平分线的性质以及反比例函数的性质,确定 $PF=PE$(图 2),由变量得到不变量,在看似不断变化的角中隐藏着不变的到角两边的相等距离,进而得到了点 P 的坐标为(3,3).

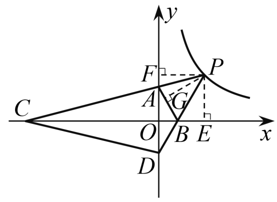

图 2

此问考查了学生对三角形内角和、外角、角平分线的定义及其性质等知识的掌握情况,能基本反映学生对于所学知识的综合应用能力.

· 第(2)问解析

$S_{\triangle OCD}=9$.解略.

评析　第(2)问主要考查了三角形的相似.看似求 Rt$\triangle OCD$ 面积,但两条直角边是在不断变化的,直接求解无从下手,所以学生会考虑通过转化,借助其他条件进行解题.通过对第

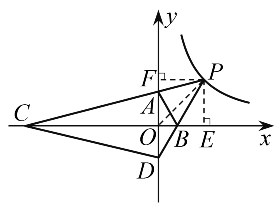

图 3

应用的能力.问题设计体现了新课程标准的基本理念,融数学建模和数学探究于其中,在不同版本的教材中,我们都可以发现问题的原型,源于课本又不拘泥于课本.

可以预见,应用问题的考查在今后会越来越被重视.该试题的出现也提醒我们一线教师,应用问题考查的方式可以多样化.另外,试题在建立模型之后的方案选择上,也体现了适当的开放性.试题也折射出数学阅读和表达的重要性.阅读理解是基于思维的认识活动,直接影响着人们发现问题和解决问题的能力,它既是获取知识的一种能力,也是影响思维和认识的一种重要能力.问题设计对表达能力有明显的要求,立足于全面考核学科素养,而这恰恰是我们在平常教学中所容易忽视的.可以预见,数学阅读和数学写作等隐性课程要素将在今后的课堂教学实践中得到越来越多的体现.

高考是大事,关注 2020 年高考题中的亮点和变化,无疑会给我们的教和学带来更多的启迪.

参考文献

[1]　任子朝.从能力立意到素养导向[J].中学数学教学参考,2018(13):1.

[2]　李现勇.坚持核心素养导向 聚焦开放命题趋势——从 2019 年高考数学北京卷开放性试题谈起[J].中学数学教学参考,2020(Z1):153-155.

[3]　洪燕君,周九诗,王尚志,鲍建生.《普通高中数学课程标准(修订稿)》的意见征询——访谈张奠宙先生[J].数学教育学报,2015(3):35-39.

(1)问的研究，得到 $PF=PE$，很容易就联想到角平分线的逆定理．此时，学生不难发现，点 P 必在 $\angle AOB$ 的平分线上，从而很自然地考虑添加辅助线，连结 OP（图3）．进一步研究后，得到一组相似三角形（$\triangle OCP\backsim\triangle OPD$），然后利用三角形相似的性质求出边边关系，就可以得出结果．笔者认为这是中等生可以独立解决的．

此问极具代表性和典型性，在问题层层推进后，学生的数学思维方法得到了提升和迁移，真正考查了学生对图形变换、化动为静方法的掌握程度．

• 第(3)问解析

方法1　如图4，将 $\triangle PEB$ 绕点 P 顺时针旋转 90°，得到 $\triangle PFM$．

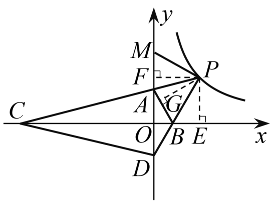

图4

在 $\triangle PAB$ 和 $\triangle PAM$ 中，$PB=PM$，$\angle BPA=\angle MPA=45^\circ$，$PA=PA$，所以 $\triangle PAB\cong\triangle PAM$(SAS)．

从而 $S_{\triangle PAB}=S_{\triangle PAM}=S_{\triangle PAF}+S_{\triangle PBE}$，$\triangle PAB$ 的高 $PG=PF=3$．

在正方形 $PFOE$ 中，$S_{\triangle OAB}=S_{正方形PFOE}-2S_{\triangle PAB}=9-AB\cdot PG=9-3AB$．

因此当 AB 有最小值时，$S_{\triangle OAB}$ 有最大值．

如图5，作 $\triangle PAB$ 的外接圆 $\odot N$，连结 NP，NA，NB，则 $NP=NA=NB$．

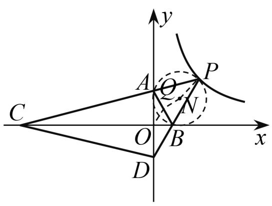

图5

因为 $\angle APB=45^\circ$，所以 $\angle ANB=90^\circ$．

取 AB 的中点 Q，连结 NQ，OQ，易知 P，N，Q，O 四点共线时，$PN+NQ+QO$ 最短．

设 $AB=x$，则 $PN=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$，$NQ=\dfrac{1}{2}x$，$OQ=\dfrac{1}{2}x$．故 $PN+NQ+QO=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}x$ 有最小值 $3\sqrt{2}$，此时 $x=6\sqrt{2}-6$，即 AB 有最小值 $6\sqrt{2}-6$．从而 $S_{\triangle OAB}$ 的最大值为 $9-3AB=9-3\times(6\sqrt{2}-6)=27-18\sqrt{2}$．

方法2　设 $OC=a$，$OD=b$（a，b 均为正数），易证 $\triangle AOC\backsim\triangle PEC$，可得 $\dfrac{AO}{PE}=\dfrac{CO}{CE}$，解得 $AO=\dfrac{3a}{3+a}$．

同理可得 $BO=\dfrac{3b}{3+b}$．

从而 $S_{\triangle OAB}=\dfrac{1}{2}OA\cdot OB=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{9ab}{9+3(a+b)+ab}$．

因为 $a>0$，$b>0$，所以 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$（当且仅当 $a=b$ 时，等号成立）．

又因为 $ab=18$，所以 $a+b\geqslant 2\sqrt{18}=6\sqrt{2}$，

故 $S_{\triangle OAB}\leqslant\dfrac{1}{2}\times\dfrac{9\times 18}{9+3\times 6\sqrt{2}+18}=27-18\sqrt{2}$．

方法3　如图6，设 $OA=m$，$OB=n$，则 $AB=AF+BE=(3-m)+(3-n)=6-(m+n)$．

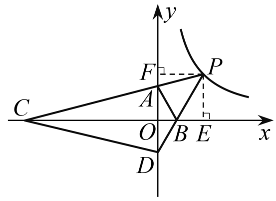

图6

在直角三角形 AOB 中，由勾股定理得 $AB^2=OA^2+OB^2$，故 $[6-(m+n)]^2=m^2+n^2$，整理得 $36-12(m+n)+2mn=0$，即 $m+n=\dfrac{mn+18}{6}$ ①．

因为 $m>0$，$n>0$，所以 $m+n\geqslant 2\sqrt{mn}$（当且仅当 $m=n$ 时，等号成立）②．

由①②得 $\dfrac{mn+18}{6}\geqslant 2\sqrt{mn}$，即 $(\sqrt{mn})^2-12\sqrt{mn}+18>0$．

解该不等式得 $\sqrt{mn}\leqslant 6-3\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{mn}\geqslant 6+3\sqrt{2}$，又 $0<m<3$，$0<n<3$，从而 $0<mn<9$．

故 $\sqrt{mn}\leqslant 6-3\sqrt{2}$，即 $mn\leqslant(6-3\sqrt{2})^2$．

从而 $S_{\triangle OAB}=\dfrac{1}{2}OA\cdot OB=\dfrac{1}{2}mn\leqslant(6-3\sqrt{2})^2=27-18\sqrt{2}$．

故 $S_{\triangle OAB}$ 的最大值为 $27-18\sqrt{2}$．

评析　通过对于第(1)问的证明，不难发现第(3)问是典型的角含半角模型，解题通法就是旋转或者翻折其中一个三角形（$\triangle PAF$ 或 $\triangle PBE$），构造一组全等三角形（$\triangle PAB$ 和 $\triangle PAM$），将求 $S_{\triangle OAB}$ 的最大值转化为求 $S_{\triangle PAB}$ 的最小值，进而转化为求 AB 的最小值．容易得到 P，N，Q，O 四点共线时即为所求．而在求 AB 的最小值时，因定角（$\angle P=45^\circ$）引入了圆，由于 AB 在不断改变，从而引起圆的“伸缩”及其圆心位置的变化，不仅考查了学生的分析能力和解题能力，更考查了学生的宏观把握能力及其在审题时所站的高度．

3　透过问题看复习

本题将几何模型隐藏于平面直角坐标系下的双曲线当中，巧妙地融合了正方形、角平分线性质与三角形的相似等考点，对固有考点进行了创新．试题以新的面貌呈现在学生面前，给学生创设了独立思考的平台，也充分体现了“淡化特殊技巧，注重通性通

法”的原则.深入研讨本题,可让教师更加清晰地看到试题命制的意图,引发对中考复习的思考.

(1)复习从教材出发,于经典中创新

如果将问题的图形进行拆分,不难发现本题的创新来源于教材:第(1)问源自苏科版七下教材第42页第20题;第(2)问的“共边相似形”的证明亦是基本思路;第(3)问的“角含半角”模型充分运用图形的运动变换、“由未知想需知”的思考方法进行分析,这正是教材在几何学习过程中要着力培养的学生思维能力和几何直观素养.本题以问题串的形式围绕核心问题进行设问,逐层推进,环环相扣,在学生对核心问题步步深入的探究过程中,能够时时回扣教材例题的做法,体会例题的价值,从而帮助学生巩固其对于基础知识、基本技能、基本思想方法、基本活动经验的掌握.

因此,在中考复习的第一轮与第二轮过程中,教师要仔细研究教材中的例习题,从初中整个知识体系的高度重新审视;在教学中进行前后联系、多角度变式、融合与创新;在分析问题时考虑条件的分解与重组,从结构中找到基本规律、基本方法;而不提倡让学生记忆大量的技巧、公式.教师还要对通性通法进行落实,熟悉各模块知识方法,帮助学生快速识别模型,准确运算,规范书写.

(2)复习从学生出发,于普适中发展

本题问题设计梯度明显,第(1)问属于基础题,第(2)问属于中档题,(2)(3)两问解决方法充满多样性,有部分学生利用高中所学的不等式的性质或者构造函数 $y=x+\frac{1}{x}$ 等其他不同方法进行求解.这遵循了“不同的人在数学上得到不同的发展”的基本理念,使本题具有较高的区分度和良好的效度,对于今后的中考压轴题命制具有重要的指导性作用.

初三复习工作是对所有学生的查漏补缺,是学困生的重新学习,是学优生在知识方法上的归纳提升.基于综合题的问题呈现的梯度,教师在中考复习时要根据学生的差异进行分层教学,例题的问题应设计符合低台阶、小步子、难度逐层提高的节奏,以适合每一位学生的不同发展需要.教师还要注意挖掘非常典型的、能很好地发挥思想方法优势的例题,设计问题串引导学生探索,以基本题型作为导火索,不断变式深化,在方法和模型生成中,让学生进行深度思维和创新性发展.最后,教师应以培养学生的数学核心素养为目的,在问题解决后,对思考方法、路径进行反思和总结以提高解决问题的能力.

(3)复习从导向出发,于专题中归纳

从近几年徐州市中考的题型结构来看,其已改变了以往的传统认知,让一线教师转变最后一道一定是关于二次函数的综合题的思维定势.依照这种命题导向,教师在复习中不能思维固化.另外,本题更提醒我们在整个初三的复习阶段,需将中考试卷中常见的题型进行分类归纳,将分散的知识点整合起来进行微专题形式的串联探究,分析题目与知识、方法之间的关系以及解题通法.

比如“角含半角模型”这个微专题,综合性较高,其包含了旋转、相似、代数计算等知识,可以全面考查学生的观察、探究、转化能力,突出考查学生的数学思维品质.借助这些专题的研究可以综合运用所学知识,在问题剖析过程中提高学生发现问题、分析问题和解决问题的能力,真正做到提高学生“观察—猜想—尝试—验证—推理”的数学思维能力.这样,就能在整体把握《数学课程标准(2011版)》基础上,对初三的专题复习课做到有的放矢,统筹兼顾.

(4)复习从数据出发,于反思中转变

经过阅卷系统的大数据统计,此题得分率是0.2,其中第(1)问的得分较高,35%的学生得满分,55%的学生得分,第(2)问只有5%的学生得分,第(3)问仅有1%的学生得分.通过抽样调查发现,学生对于(2)、(3)两问不能灵活地由已知向未知、由复杂向简单转化,难以挖掘隐藏在题目中的条件和问题之间存在的内在联系.还有很多学生犯了经验主义错误,拿到题目就当成函数题进行求解,结果一无所获.而对于最后一问,大多数学生在考试结束后表示“似曾相识,但无从下手”.

因此,教师在中考复习教学中应当重视每次模拟练习的统计分析,善于利用得分率、错题分布图等数据进行学情分析,将正确率高的试题进行变式,对错误率高的题目进行追溯,以便摸清不同学生在不同知识层面、方法层面的真正困难,调整教学内容,转变学习方式,实施精准复习.

讣　告

中国共产党党员、苏州大学数学科学学院退休教师、原数学系《中学数学研究与讨论》(今《中学数学月刊》)创刊时(1978)的第一任主编杜午初先生,于2021年3月29日因病不幸去世,享年90岁.