基于问题链的高中数学深度学习探究与实践

——以“含参数不等式恒成立问题”教学为例

324100 浙江省江山中学 徐丽峰
324000 浙江省龙游县教师进修学校 赖忠华

摘 要:以问题解决为学习目标的问题链能激发学生学习积极性,引导学生深度思考与探究,促使学生在问题解决过程中形成数学思维的关键能力,对学生深度学习有很好的引领作用,是实现深度学习的有效手段.笔者以“含参数不等式恒成立问题”教学为例,通过设置问题链,推进学生深度学习,培养学生类比思维、创新思维、批判性思维等高阶思维,实现核心素养的落实.

关键词:问题链;深度学习;含参数不等式;恒成立

北京师范大学郭华教授指出:“深度学习是指在教师引领下,学生围绕具有挑战性的学习主题,全身心积极参与、体验成功、获得发展的有意义的学习过程.”[1]深度学习是对学生浅层学习、被动学习情形的一种矫正.《普通高中数学课程标准(2017年版)》指出,“学生要开展基于项目的学习、基于问题的学习、基于探究的学习、基于挑战的学习”,因此,开展深度学习符合新课程改革方向,有利于学生数学核心素养的培养.数学学习,往往从问题开始,问题链是教师根据教学目标和学生实际,将数学知识转化为有层次、有深度、有针对性的一系列有效问题.以问题解决为学习目标的问题链能激发学生学习积极性,引导学生深度思考与探究,促使学生在问题解决过程中形成数学思维的关键能力,对学生的深度学习有很好的引领作用,是实现深度学习的有效手段.笔者以“含参数不等式恒成立问题”教学为例,阐述通过设置问题链,推进学生深度学习,培养学生类比思维、创新思维、批判性思维等高阶思维,实现核心素养的落实.

一、教学实践

(一)创设问题情境,深挖数学思想

师:请同学们在同一直角坐标系中作出函数 $f(x)=x$, $g(x)=\ln x$ 的图像并观察,你有什么发现?

生1:如图1,对数函数图像位于正比例函数图像下方.

师:将函数 $f(x)$ 图像上下平移得到的函数 $F(x)=x+m$ 的图像,与函数 $g(x)=\ln x$ 的图像之间可能有怎样位置关系?

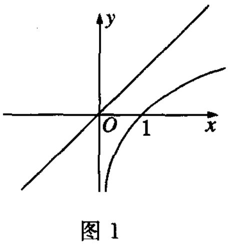

图1

生1:相离,相交,相切.

问题1 当 m 取何值时,函数 $F(x)=x+m$ 图像位于函数 $g(x)=\ln x$ 图像上方?

生2:对于 m 不同的取值,函数 $F(x)=x+m$ 图像是一组平行直线,我们先考虑两图像相切情形.设切点坐标 $(x_0,\ln x_0)$,则函数 $g(x)$ 在切点处导数等于直线斜率即 $\frac{1}{x_0}=1$.函数 $F(x)=x+m$ 和 $g(x)=\ln x$ 在切点处函数值相等,即 $\ln x_0=x_0+m$,联立方程解得 $\begin{cases}x_0=1\\m=-1\end{cases}$,故当 $m\geqslant -1$ 时,函数 $F(x)=x+m$ 图像位于函数 $g(x)=\ln x$ 图像上方.

师:采用“特殊到一般”解题思想,先考虑两者相切这一特殊位置关系,求出相应的 m 值,再结合函数图像写结论.

评析:起点低、立意深的起始问题有利于学生及时融入课堂,激发学生学习热情,体验数学思想方法.本题以形助数优化解题,以数辅形深化知识内涵.

(二)变换思考角度,助推知识建构

师:刚才我们从几何角度思考问题1,你能用代数的方法解决该题吗?

生3:从代数角度看,该题即是一个含参数不等式问题.

问题2 不等式 $x+m\geqslant \ln x$ 恒成立,求 m 的取值范围.

生3:采用变量分离法.移项,得 $m\geqslant \ln x-x$,由题意知要使不等式恒成立,即要 $m\geqslant(\ln x-x)_{\max}$.记 $h(x)=\ln x-x$, $x\in(0,+\infty)$,则 $h'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$,易知函数 $h(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递增,在

区间$(1,+\infty)$上单调递减.故$h(x)_{\max}=h(1)=-1$，从而$m\geqslant-1$.

师：变量分离后，将原不等式恒成立问题转化为求新函数$h(x)=\ln x-x$的最大值，再利用导数求解.

生4：也可以这样求解.设函数$h(x)=x+m-\ln x$，只需$h(x)_{\min}\geqslant0$.利用导数易知函数$h(x)$的最小值为$m+1$，从而$m\geqslant-1$.

师：将形如$f(x)\geqslant g(x)$恒成立问题转化为证明$[f(x)-g(x)]_{\min}\geqslant0$，解法简洁明了，凸显本质.

生5：我发现在不等式$x+m\geqslant\ln x$中，令$x=1$，解得结果和答案一样.

生4：这只是不等式$x+m\geqslant\ln x$恒成立的必要条件.

生5：接下来只需证明当$m\geqslant-1$时，不等式成立即可.如果成立，这就是答案，如果不成立，说明参数范围要压缩.

师：这是非常好的想法——先猜后证.下面我们证明当$m\geqslant-1$时，不等式$x+m\geqslant\ln x$恒成立，即只要证明当$m\geqslant-1$时，不等式$x+m-\ln x\geqslant0$恒成立，由于$x+m-\ln x\geqslant x-1-\ln x$，故只要证明不等式$x-1-\ln x\geqslant0$恒成立，即证明$x-1\geqslant\ln x$恒成立，显然该不等式恒成立，问题得到最终解决.本方法对于解选择题更加有效.通过观察，可得当x取某特殊值时参数的取值范围，此时若能排除其他选项，就能得到正确的解，解题事半功倍.

评析：问题2引发学生深度思考，学生从几何、代数、运动变化等多角度解题，进而深度理解恒成立问题的本质.这是深度学习区别于浅层学习的重要特征.

(三)促成深度理解，培育高阶思维

师：类似地，请同学们尝试解决下列问题.

问题3 已知函数$f(x)=x\ln x-x^2+2mx+m$ $(m\in\mathbf{R})$，若对任意$x\in[1,+\infty)$，不等式$f(x)\leqslant0$恒成立，求参数m的取值范围.

生6：采用变量分离法.$\because x\in[1,+\infty)$，$\therefore$不等式等价于$m\leqslant\dfrac{x^2-x\ln x}{2x+1}$恒成立.记$h(x)=\dfrac{x^2-x\ln x}{2x+1}$，则$h'(x)=\dfrac{2x^2-1-\ln x}{(2x+1)^2}$.$\because x-1\geqslant\ln x$，$x\in[1,+\infty)$，$\therefore h'(x)\geqslant\dfrac{2x^2-1-(x-1)}{(2x+1)^2}=\dfrac{2x^2-x}{(2x+1)^2}>0$，可得函数$h(x)$在区间$[1,+\infty)$单调递增，故$h(x)_{\min}=h(1)=\dfrac{1}{3}$，$\therefore m\leqslant\dfrac{1}{3}$.

师：本题能否转化成$f(x)_{\max}\leqslant0$来解决？

生7：$f'(x)=1+\ln x-2x+2m$，$x\in[1,+\infty)$，由于无法确定$f'(x)$的符号，所以无法判断函数$f(x)$单调性，求得它的最大值.

师：同学们能批判性思考问题，分析到位.

生8：可以"先猜后证"，具体解法如下.$\because f(1)\leqslant0$，$\therefore m\leqslant\dfrac{1}{3}$.下面证明对任意$m\in(-\infty,\dfrac{1}{3}]$，$x\in[1,+\infty)$，不等式$x\ln x-x^2+2mx+m\leqslant0$恒成立.变换主元，将左边看成参数$m$的函数，记$h(m)=(2x+1)m+x\ln x-x^2$，$\because 2x+1>0$，$\therefore h(m)$在区间$(-\infty,\dfrac{1}{3}]$上单调递增，即$h(m)\leqslant h(\dfrac{1}{3})=-x^2+x\ln x+\dfrac{2x}{3}+\dfrac{1}{3}$.记$k(x)=-x^2+x\ln x+\dfrac{2x}{3}+\dfrac{1}{3}$，$k'(x)=-2x+\dfrac{5}{3}+\ln x$.$\because x\in[1,+\infty)$，且$\ln x\leqslant x-1$，$\therefore k'(x)\leqslant-x+\dfrac{2}{3}\leqslant0$，$\therefore$函数$k(x)=-x^2+x\ln x+\dfrac{2x}{3}+\dfrac{1}{3}$在区间$[1,+\infty)$上单调递减.故$k(x)\leqslant k(1)=0$，即$x\ln x-x^2+2mx+m\leqslant0$恒成立.

师："先猜后证"，非常有创意的思路，同学们只要坚持思考、大胆尝试、勇于创新，就能培养更高品质、更高层次的数学思维.

问题4 已知函数$f(x)=x\ln x-x^2+2mx+m$ $(m\in\mathbf{R})$，若对任意$x\in[1,+\infty)$，不等式$f(x)\leqslant3m-1$恒成立，求参数m的取值范围.

生9：记$G(x)=f(x)-(3m-1)=x\ln x-x^2+1+2mx-2m$，则$G(x)\leqslant0$恒成立.$\because G(1)=0$，所以存在$x_0>1$，使得函数$G(x)$在区间$(1,x_0)$上单调递减.$\because G'(x)=\ln x-2x+2m+1$，所以当$x\in(1,x_0)$时，$G'(x)\leqslant0$.令$x\to1$，则$G'(1)\leqslant0$，即$m\leqslant\dfrac{1}{2}$.下证$m\leqslant\dfrac{1}{2}$满足题意.$x\ln x-x^2+1+2mx-2m=m(2x-2)+x\ln x-x^2+1$，且$2x-2\geqslant0$，$\therefore m(2x-2)+x\ln x-x^2+1\leqslant\dfrac{1}{2}(2x-2)+x\ln x-x^2+1\leqslant x-1+x(x-1)-x^2+1=0$，故$m\leqslant\dfrac{1}{2}$时，不等式恒成立.

师：$G(x)$在区间$(1,x_0)$上单调递减，非常漂亮的想法，好运总是眷顾善于思考的人.

生10：记$G(x)=x\ln x-x^2+1+2mx-2m$，$\because G(1)=0$，$\therefore$原不等式等价转化为对任意$x\in[1,+\infty)$，$G(x)\leqslant G(1)$恒成立，从而$G(x)$是$(1,+\infty)$上的减函数，故$G'(x)=\ln x-2x+2m+1\leqslant0$，$x\in(1,$

$+\infty)$. 当 $x\to 1$ 时，则 $G'(1)=2m-1\leqslant 0$，解得 $m\leqslant\frac{1}{2}$.

生 9：我认为函数 $G(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上不一定单调递减，函数在定义域内可能先递减，后递增，再递减，这里答案一致，纯属巧合.

师：对，你抓住了错误的根源. 下面请大家尝试改编问题.

生 10：将函数定义域改为 $(0,+\infty)$.

问题 5 已知函数 $f(x)=x\ln x-x^2+2mx+m$ $(m\in\mathbf{R})$，若对任意 $x\in(0,+\infty)$，不等式 $f(x)\leqslant 3m-1$ 恒成立，求参数 m 的可能取值.

师：请大家合作探究该问题.

生 11：记 $G(x)=f(x)-(3m-1)=x\ln x-x^2+2mx-2m+1$，易知 $G(1)=0$，则 $G(x)\leqslant G(1)$ 对于 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立. 此时必存在 $0<p<1<q$，使得函数 $G(x)$ 在区间 $(p,1)$ 上单调递增，在区间 $(1,q)$ 上单调递减，从而函数 $G(x)$ 在 $x=1$ 取得极大值. 故 $G'(1)=0$，即 $m=\frac{1}{2}$，接下来只需证明当 $m=\frac{1}{2}$ 时，不等式 $G(x)\leqslant 0$ 恒成立即可. 具体解题过程如下，$\because G(x)=x(\ln x-x+1)$，$x\in(0,+\infty)$，又不等式 $\ln x\leqslant x-1$ 恒成立，$\therefore$ 当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$G(x)=x(\ln x-x+1)\leqslant x(x-1-x+1)\leqslant 0$ 恒成立，故参数 m 的可能取值为 $\frac{1}{2}$.

评析：在教学过程中，教师精心设置问题链. 学生在解题过程中运用所学的知识，合理筛选解题方法，并在解题过程中逐步优化方案，升华策略，这是学生深度学习、高阶思维在课堂上的具体表现.

（四）反思探究历程，发展核心素养

师：本节课我们学习了含参数不等式恒成立问题的解决方法，下面请数学课代表进行小结.

生 12：针对含参数不等式恒成立问题的特征，我们一般可采取以下方法，

(1)数形结合，将不等式两边分别看作两个函数，正确作出这两个函数，然后通过两个函数图像的位置关系求出参数的取值范围；

(2)变量分离，将问题转化为形如 $a\geqslant g(x)$（或 $a\leqslant g(x)$）的形式，并通过求函数 $g(x)$ 的最值来确定 a 的取值范围；

(3)化整为零，将不等式等价转化为 $g(x)\leqslant 0$（或 $g(x)\geqslant 0$）恒成立问题，再由 $g(x)_{\max}\leqslant 0$（或 $g(x)_{min}\geqslant 0$）确定参数的取值范围；

(4)先猜后证，先求出不等式恒成立的一个必要条件——参数的取值范围，再证明不等式在该范围内恒成立.

师：解题过程体现了哪些数学思想方法？

生：体现了函数与方程、转化与化归、数形结合等数学思想方法.

评析：学生反思学习过程，从知识、方法、思想、问题设计等方面归纳总结，深化认识，并将新旧知识进行整合，形成新的知识网络.

二、教学反思

（一）深度学习是基于问题的学习

问题是教学的心脏. 问题链教学中，尽管教师需要课前设计尽可能详细的主干问题（即问题链），但在课堂实施过程中，教师并不需要将这些问题全部呈现在课堂上，而是需要根据问题的功能选择呈现方式，以便为学习者的思考和表达提供空间[2]. 以本节课为例，起始问题是一个基础问题，由教师提出，学生结合图像容易解决. 教师以此为契机引导学生利用代数法解题，并由学生提出延展性问题（如问题 2），此类问题是学生基于前一个问题研究的基础上产生的，由学生自己解决. 学生从几何视角、代数视角、运动变化视角等多角度解题，从而逐步进入深度学习的情境，进而深度理解恒成立问题的本质. 开放性问题能充分激发学生的思维火花，培养学生的创新意识. 通过问题 5 的发现、提出、解决，学生对含参数不等式恒成立问题本质的理解、对不同解法的认识等达到更高认识水平. 问题链既成为连接知识与方法的桥梁，又成为培养学生理性精神、开放意识、批判性思维和创新能力的助推器.

（二）深度学习是激发思维的学习

有效的深度学习是通过激发学生的思维来实现的，那么如何激发学生思维，提高学生思维参与度呢？可以从以下三个方面着手.

(1)创设具体、易操作的低起点问题，让学生思维动起来；

(2)学习活动立足于数学本质，注重多角度理解数学问题，让学生思维活起来；

(3)主干问题设计层层递进，帮助学生建立螺旋上升的数学思维框架，实现深度思维.

“深度思维”是学习者在学习过程中充分参与和积极构建，会用全面、联系的眼光处理数学问题的思维模式. 以本节课为例，起始问题指向明确，思维入口宽，使得多种数学思维方法涌现，如几何角度解题

（下转第 9 页）

方法2:作 $AH\perp BC$.

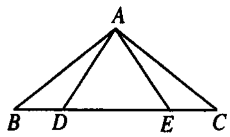

图5

设计意图:图式阶段是最后阶段,经过三个阶段后,等腰三角形的性质已经形成了一个包含具体对象、抽象过程、完整的性质定理,以及与其他定理的区别与联系的综合心理图式.图式阶段要加强性质的应用和教学的总结,以此帮助学生形成稳固的心理图式.

这一组题中,例题的设计是为了让学生熟悉等腰三角形性质的符号表示,特别是等腰三角形"三线合一"的条件表述要充分,结论表述要恰当,书写要规范.练习题的设计是为了使学生发现练习和例题的区别,从而引导学生学会分类讨论,可以拓宽学生的思路,养成更加科学严谨的思考方法.思考题的设计是为了引导学生发现全等三角形也可解决此问题,但用等腰三角形的性质解题会更简洁.设计好练习题对于培养学生逻辑推理能力起着重要的促进作用,通过性质的应用,让学生在头脑中形成对定理理解的综合架构.

笔者引导学生回顾本节课的学习,结合认知中原有的图式对操作、过程、对象进行适当整合,产生同化和顺应的平衡状态,最后建立新的图式.

四、总结

七年级的学生处于学习几何逻辑推理的起步阶段,本节课运用APOS理论的四阶段来设计教学,上一阶段紧扣下一个阶段,层层递进,使几何定理的教学更显层次化.本节课教学设计如图6所示,教师引导学生大胆猜测,敢于尝试,严密求证,可以有效地培养学生的逻辑推理能力.

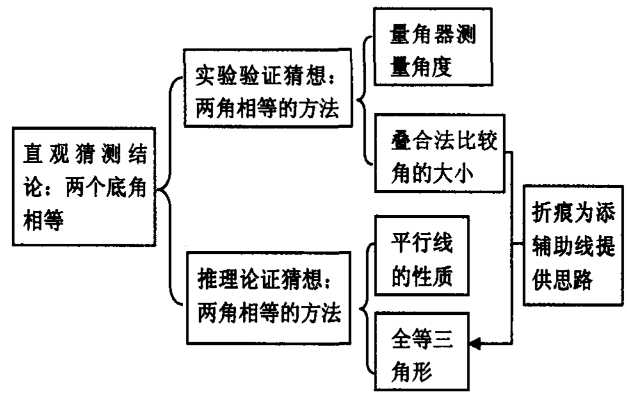

图6

总之,APOS理论的四个过程是一个认识的整体,是一个循序渐进的过程.这四个过程在课堂中的运行程序可简单描述为:动手操作体验—形成概念过程—形成对象定性质—综合应用形成图式[1].运用APOS理论进行概念教学,只有踏踏实实完成了前面三个阶段,才能使最后图式阶段顺利达成.而几何定理的教学,需要根据学生的认知发展逻辑去设计并实施,更要着眼于提高学生的逻辑推理能力,按照四阶段来理解和设计教学正好满足这个需求,所以,这是一条可行的途径.

参考文献

[1] 李莉.学生学习数学概念的层次分析[J].数学教育学报,2002(3):44.

(上接第6页)

(数形结合思维)、变量分离法解题(转化思维)、特殊值求解(特殊化思维)等.问题3—问题5的解决过程中,类比思维、批判性思维、创造性思维等得以体现.类比是重要的思维方法,类比创造是学生的关键能力,它们属于数学深度学习产生的高阶思维.而有效类比迁移运用则体现了学生的参与度,符合学生的认知规律.学生经历了思考的过程,形成了思维方法,构建了思维框架,最终实现深度学习.

(三)深度学习是聚焦素养的学习

深度学习模式遵循学生的认知规律,凸显数学学科的本质,把发展学生核心素养作为数学学习的最终目标,着力培养学生深层次思考和学习的能力.以本节课为例,学生通过几何问题与代数问题的相互转化,数学抽象素养得到了培养;在类比解题、类比编题的过程中,逻辑推理和数学运算能力得到了提高.通过一题多解、多题一解、类比应用、批判性解题等,学生的认知结构逐步得到了完善,数学核心素养得到了提升.课堂上发现问题、提出问题、分析问题、解决问题,是学生深度学习过程性结果的具体体现,进入深度学习以后,逻辑推理、数学运算、数学抽象等核心素养内化为学生本身的思维品质,从而有力促进学生数学核心素养的良好发展.

参考文献

[1] 郭华.深度学习及其意义[J].课程教材教法,2016(11):25.
[2] 唐恒钧.基于深度理解的问题链教学[J].教育发展研究,2020(4):53-57.