江苏省仪征中学2019-2020学年第一学期高三数学周三练习（3）理科

2019. 9. 18

范围：集合与逻辑、函数与导数、三角函数、平面向量、圆

一、填空题：本大题共14小题，每小题5分，计70分. 不需写出解答过程，请把答案写在答题纸的指定位置上.

1．已知集合 $A=\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}$， $B=\{x|-1<x\leqslant 1\}$，则 $A\cap B=$____________.

2. 若命题 $p:\exists x\in\mathbf{R},使x^2+ax+1<0$，则 $\neg p$： __________________.

3. 函数 $y=\sqrt{\dfrac{1-x}{x+2}}$ 的定义域为___________.

4、过点 $P(2,3)$，且在两坐标轴上的截距互为相反数的直线方程是_________________；

5. 已知平行直线 $l_1:x-2y-2=0,l_2:2x-4y+1=0$，则 l_1 与 l_2 之间的距离为_____________.

6. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的周期为2的奇函数，当 $0<x<1$ 时， $f(x)=8^x$，则 $f(-\dfrac{19}{3})=$_______.

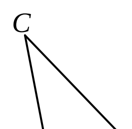
7. 在 ΔABC 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，若 $a^2-b^2=2bc$， $\sin C=3\sin B$，则 $A=$_________.

8. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2x-1,x>0\\x^2+x,x\leqslant 0\end{cases}$，若函数 $g(x)=f(x)-m$ 有三个零点，则实数 m 的取值范围是________.

9. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}a^x（x<0）,\\（a-3）x+4a（x\geqslant 0）\end{cases}$ 满足对任意 $x_1\neq x_2$，都有 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$ 成立，则 a 的取值范围是__________.

10. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\dfrac{\pi}{3})(\omega>0)$，将函数 $y=f(x)$ 的图象向右平移 $\dfrac{2}{3}\pi$ 个单位长度后，所得图象与原函数图象重合，则 ω 的最小值等于___________.

11. 在平面直角坐标系 xoy 中， A,B 为直线 $3x+y-10=0$ 上的两动点，以 AB 为直径的圆 M 恒过坐标



原点O，当圆M 的半径最小时，其标准方程为______________.

12. 如图，点O为△ABC的重心，且$OA\perp OB$，$AB=4$，

则$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{BC}$的值为_________.

13. 已知$y=f(x)(x\in R)$的导函数为$f'(x)$. 若$f(x)-f(-x)=2x^3$，且当$x\geq 0$时，$f'(x)>3x^2$，则不等式$f(x)-f(x-1)>3x^2-3x+1$的解集是__________.

14.已知O是锐角ΔABC的外接圆的圆心，且$\angle A=\theta$，

若$\dfrac{\cos B}{\sin C}\overrightarrow{AB}+\dfrac{\cos C}{\sin B}\overrightarrow{AC}=2m\overrightarrow{AO}$，则$m=$___________.（用$\theta$表示）

二、解答题：本大题共 6 小题，计 90 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤，请把答案写在答题纸的指定区域内.

15. （本小题满分 14 分）已知向量$\vec{a}=(\sin(\dfrac{\omega}{2}x+\varphi),1)$，$\vec{b}=(1,\cos(\dfrac{\omega}{2}x+\varphi))$ $(\omega>0,0<\varphi<\dfrac{\pi}{4})$，记函数$f(x)=(\vec{a}+\vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{b})$. 若函数$y=f(x)$的周期为 4，且经过点$M(1,\dfrac{1}{2})$.

（1）求ω的值；（2）当$-1\leq x\leq 1$时，求函数$f(x)$的最值.

16. （本小题满分 14 分）已知函数$f(x)=3^x+\lambda\cdot 3^{-x}(\lambda\in\mathbf{R})$

（1）若$f(x)$为奇函数，求λ的值和此时不等式$f(x)>1$的解集；

（2）若不等式$f(x)\leqslant 6$对$x\in[0,2]$恒成立，求实数λ的取值范围.

17.（本小题满分 14 分）已知圆$M: x^2+y^2-2x+a=0$。

（1）若 $a=-8$，过点 $P(4,5)$ 作圆 M 的切线，求该切线方程；

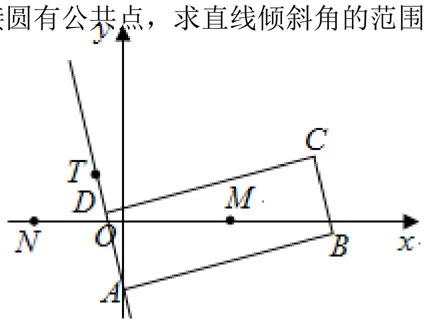
（2）若 AB 为圆 M 的任意一条直径，且 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-6$（其中 O 为坐标原点），求圆 M 的半径。

18.（本小题满分 16 分）如图，矩形 $ABCD$ 的两条对角线相交于点 $M(2,0)$， AB 边所在直线的方程为 $x-3y-6=0$ 点 $T(-1,1)$ 在 AD 边所在直线上.

（1）求 AD 边所在直线的方程；

（2）求矩形 $ABCD$ 外接圆的方程；

（3）若直线 l 经过点 $N(-2,0)$，且与矩形 $ABCD$ 的外接圆有公共点，求直线倾斜角的范围.



19.（本小题满分 16 分） 设函数 $f(x)=x(x-1)^2$， $x>0$.

（1）求 $f(x)$ 的极值；

（2）设 $0<a\leqslant 1$，记 $f(x)$ 在 $\left(0,a\right]$ 上的最大值为 $F(a)$，求函数 $G(a)=\dfrac{F(a)}{a}$ 的最小值；

（3）设函数 $g(x)=\ln x-2x^2+4x+t$ （t 为常数），若使 $g(x)\leqslant x+m\leqslant f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立的实数 m 有且只有一个，求实数 m 和 t 的值.

20.（本小题满分 16 分）设常数 $a\geqslant 0$，函数 $f(x)=x-\ln^2 x+2a\ln x-1(x\in(0,+\infty))$.

（1）令 $g(x)=xf'(x)(x>0)$ 时，求的最小值，并比较 $g(x)$ 的最小值与零的大小；

（2）求证： $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数；

（3）求证：当 $x>1$ 时，恒有 $x>\ln^2 x-2a\ln x+1$.

江苏省仪征中学 2019-2020 学年第一学期高三数学周三练习（3）理科参考答案

2019.9.18

1. $\{x|0\leqslant x\leqslant 1\}$ 2. $\forall x\in\mathbf{R}$,使$x^2+ax+1\geqslant 0$ 3. $(-2,1]$ 4. $x-y+1=0$或$3x-2y=0$ 5. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 6. -2 7. $\frac{\pi}{3}$ 8. $(-\frac{1}{4},0]$ 9. 0<a$\leqslant\frac{1}{4}$ 10. 3 11. $(x-3)^2+(y-1)^2=10$

12. 32 13. $(\frac{1}{2},+\infty)$ 14. $\sin\theta$

15. 解：(1) $f(x)=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}^2-\vec{b}^2=\sin^2(\frac{\omega}{2}x+\varphi)-\cos^2(\frac{\omega}{2}x+\varphi)=-\cos(\omega x+2\varphi)$ …4 分

由题意得：周期$T=\frac{2\pi}{\omega}=4$，故$\omega=\frac{\pi}{2}$ ………………6 分

(2)∵图象过点$M(1,\frac{1}{2})$，$\therefore -\cos(\frac{\pi}{2}+2\varphi)=\frac{1}{2}$

即$\sin 2\varphi=\frac{1}{2}$，而$0<\varphi<\frac{\pi}{4}$，故$2\varphi=\frac{\pi}{6}$，则 $f(x)=-\cos(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{6})$． ………………10 分

当$-1\le x\le 1$时，$-\frac{\pi}{3}\le\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{6}\le\frac{2\pi}{3}$ $\therefore -\frac{1}{2}\le\cos(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{6})\le 1$

$\therefore$当$x=-\frac{1}{3}$时，$f(x)_{\min}=-1$，当$x=1$时，$f(x)_{\max}=\frac{1}{2}$． ………………14 分

16. 解：（1）函数 $f(x)=3^x+\lambda\cdot 3^{-x}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$.
∵ $f(x)$ 为奇函数，∴ $f(-x)+f(x)=0$ 对$\forall x\in\mathbf{R}$恒成立，
即$3^{-x}+\lambda\cdot 3^x+3^x+\lambda\cdot 3^{-x}=(\lambda+1)(3^x+3^{-x})=0$对$\forall x\in\mathbf{R}$恒成立，
∴ $\lambda=-1$. ．．．．．．．．．． 3 分
此时 $f(x)=3^x-3^{-x}>1$即$(3^x)^2-3^x-1>0$，
解得$3^x>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$或$3^x<\frac{1-\sqrt{5}}{2}$(舍去)， ．．．．．．．．．． 6 分
∴解集为$\{x|x>\log_3\frac{1+\sqrt{5}}{2}\}$. ．．．．．．．．．． 7 分
（2）由 $f(x)\leqslant 6$得$3^x+\lambda\cdot 3^{-x}\leqslant 6$，即$3^x+\frac{\lambda}{3^x}\leqslant 6$，
令$t=3^x\in[1,9]$，原问题等价于$t+\frac{\lambda}{t}\leqslant 6$对$t\in[1,9]$恒成立，
亦即$\lambda\leqslant -t^2+6t$对$t\in[1,9]$恒成立， ．．．．．．．．．．． 10 分
令$g(t)=-t^2+6t,t\in[1,9]$，
∵ $g(t)$在$[1,3]$上单调递增，在$[3,9]$上单调递减，
∴当$t=9$时，$g(t)$有最小值$g(9)=-27$，∴ $\lambda\leqslant -27$. ．．．．．．．．． 14 分

17．解：（1）若$a=-8$，圆M：$(x-1)^2+y^2=9$，圆心M $(1,0)$，半径为 3. ……2 分

若切线斜率不存在，圆心M到直线$x=4$的距离为 3，
所以直线$x=4$为圆M的一条切线； ………4 分
若切线斜率存在，设切线方程为：$y-5=k(x-4)$，化简为：$kx-y-4k+5=0$，则圆心到直线的距离$\frac{|k-4k+5|}{\sqrt{k^2+1}}=3$，解得：$k=\frac{8}{15}$.
所以切线方程为$x=4$或$8x-15y+43=0$； ………7 分

（2）圆M的方程可化为$(x-1)^2+y^2=1-a$，圆心M $(1,0)$，则$OM=1$

设圆的半径$r=\sqrt{1-a}(a<1)$ …………9 分

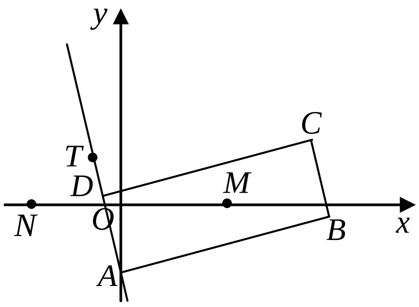
因为 AB 为圆 M 的任意一条直径，所以 $\overrightarrow{MA}=-\overrightarrow{MB}$，且 $|\overrightarrow{MA}|=|\overrightarrow{MB}|$，则

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MA})\cdot(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MB})=(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{MB})\cdot(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MB})=(\overrightarrow{OM})^2-(\overrightarrow{MB})^2=1-r^2$ …12 分

又因为$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-6$，解得：$r=\sqrt{7}$，所以圆的半径为$\sqrt{7}$. ………14 分

18、解：（1）因为AB边所在直线的方程为$x-3y-6=0$，且AD与AB垂直，

所以直线AD的斜率为-3.



又因为点$T(-1,1)$在直线AD上，

所以AD边所在直线的方程为$y-1=-3(x+1)$.

$3x+y+2=0$.

（2）由$\begin{cases}x-3y-6=0,\\3x+y+2=0\end{cases}$

解得点A的坐标为$(0,-2)$，

因为矩形$ABCD$两条对角线的交点为$M(2,0)$.

所以M为矩形$ABCD$外接圆的圆心.

又$\left|AM\right|=\sqrt{(2-0)^2+(0+2)^2}=2\sqrt{2}$.

从而矩形$ABCD$外接圆的方程为$(x-2)^2+y^2=8$.

（3）求出斜率范围 $k\in[-1,1]$，得倾斜角范围$\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]\cup\left[\dfrac{3\pi}{4}，\pi\right)$。

19. 解：

（1）$f'(x)=(x-1)^2+2x(x-1)=3x^2-4x+1=(3x-1)(x-1)$，$x>0$. 令 $f'(x)=0$，得 $x=\frac{1}{3}$ 或 $x=1$，$f(x)$，$f'(x)$ 随x的变化情况如下表

x	$(0,\frac{1}{3})$	$\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{3},1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	增	极大值	减	极小值	增

∴当 $x=\frac{1}{3}$ 时，有极大值 $f(\frac{1}{3})=\frac{4}{27}$，当 $x=1$ 时，有极小值 $f(1)=0$.

（2）由（1）知：$f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{3}]$，$[1,+\infty)$ 上是增函数，在 $[\frac{1}{3},1]$ 上是减函数，

①$0<a\le\frac{1}{3}$ 时，$F(a)=a(a-1)^2$，$G(a)=(a-1)^2\ge\frac{4}{9}$

特别的，当 $a=\frac{1}{3}$ 时，有 $G(a)=\frac{4}{9}$，

②当 $\frac{1}{3}<a\le1$ 时，$F(a)=f(\frac{1}{3})=\frac{4}{27}$，$G(a)=\frac{\frac{4}{27}}{a}\ge\frac{4}{27}$

特别的，当 $a=1$ 时，有 $G(a)=\frac{4}{27}$，

由①②知，当 $0<a\le1$ 时，函数 $G(a)=\frac{F(a)}{a}$ 的最小值为 $\frac{4}{27}$.

（3）由已知得 $h_1(x)=x+m-g(x)=2x^2-3x-\ln x+m-t\ge0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

∵$h'_1(x)=\frac{(4x+1)(x-1)}{x}$，

∴$x\in(0,1)$ 时，$h'_1(x)<0$，$x\in(1,+\infty)$ 时，$h_1(x)>0$

∴$x=1$ 时，$h'_1(x)$ 取极小值，也是最小值，

∴当 $h_1(1)=m-t-1\ge0$，$m\ge t+1$ 时，$h_1(x)\ge0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

同样，$h_2(x)=f(x)-x-m=x^3-2x^2-m\ge0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

∵$h'_2(x)=3x(x-\frac{4}{3})$，

∴$x\in(0,\frac{4}{3})$ 时，$h'_2(x)<0$，$x\in(\frac{4}{3},+\infty)$，$h'_2(x)>0$，

∴$x=\frac{4}{3}$ 时，$h_2(x)$ 取极小值，也是最小值，

∴$h_2(\frac{4}{3})=-\frac{32}{27}-m\ge0$，$m\le-\frac{32}{27}$ 时，$h_2(x)\ge0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

∴$t+1\le m\le-\frac{32}{27}$，

∵实数m有且只有一个，∴$m=-\frac{32}{27}$，$t=-\frac{59}{27}$.

20. （本小题满分 16 分）

解：（1）因为 $f(x)=x-\ln^2x+2a\ln x-1(x\in(0,+\infty))$，

所以 $f'(x)=1-[\frac{1}{x}\times\ln x+(\ln x)\times\frac{1}{x}]+\frac{2a}{x}=1-\frac{2\ln x}{x}+\frac{2a}{x}$. ……………………2 分

所以 $g(x)=xf'(x)=x-2\ln x+2a,(x>0)$， ……………………3 分

所以 $g'(x)=1-\frac{2}{x}=\frac{x-2}{x}$，令 $g'(x)=0$，得 $x=2$． ························4 分

列表如下：

x	（0，2）	2	（2，+∞）
$g'(x)$	−	0	+
$g(x)$	减	极小值 g(2)	增

所以 $g(x)$ 在 $x=2$ 处取得极小值 $g(2)=2-2\ln 2+2a$ ，

即 $g(x)$ 的最小值为 $g(2)=2-2\ln 2+2a=2(1-\ln 2)+2a$ • ····················6 分

因为 $\ln 2<1$ ，所以 $1-\ln 2>0$ ，又 $a\geqslant 0$，所以 $g(2)>0$ • ····················8 分

（2）由（1）知，$g(x)$ 的最小值为正数，

所以对一切 $x\in(0,+\infty)$ ，恒有 $g(x)=xf'(x)>0$． ··································10 分

从而当 $x>0$ 时，恒有，$f'(x)>0$ ，

故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数． ··12 分

（3）由（2）知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，

所以当 $x>1$ 时，$f(x)>f(1)$ ． ··14 分

又 $f(1)=1-\ln^2 1+2a\ln 1-1=0$ ，

所以 $f(x)>0$ ，即 $x-\ln^2 x+2a\ln x-1>0$ ，··15 分

所以 $x>\ln^2 x-2a\ln x+1$，

故当 $x>1$ 时，恒有 $x>\ln^2 x-2a\ln x+1$． ··16 分