江苏省如东高级中学 2021～2022 学年度高三年级第一次学情检测

数　学

一、单选题：本大题共 8 小题，每题 5 分，共 40 分。在每小题提供的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 命题：$\forall\ x\ge 1$，$x^2+5x\ge 6$ 的否定是（　　）

A．$\exists\ x\ge 1$，$x^2+5x<6$　　B．$\forall\ x\ge 1$，$x^2+5x<6$

C．$\exists\ x<1$，$x^2+5x<6$　　D．$\exists\ x<1$，$x^2+5x\ge 6$

2. 设集合 $A=\{x|3x-1<m\}$，若 $1\in A$ 且 $2\notin A$，则实数 m 的取值范围是（　　）

A．$(2，5)$　　B．$[2，5)$　　C．$(2，5]$　　D．$[2，5]$

3. “$a>b$”是“$\lg a>\lg b$”的（　　）

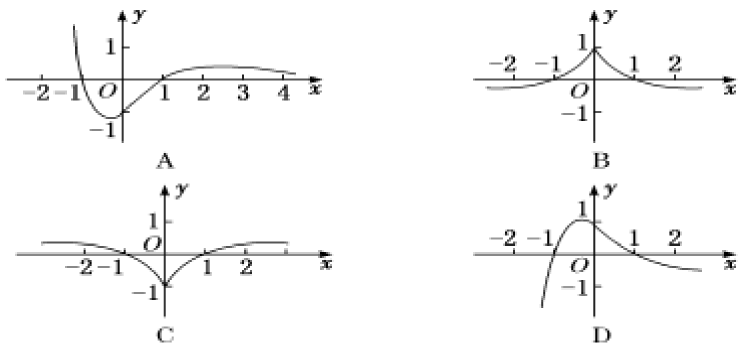
A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

4. 在数学课外活动中，小明同学进行了糖块溶于水的试验，将一块质量为 7 克的糖块放入到一定量的水中，测量不同时刻未溶解糖块的质量，得到若干组数据，其中在第 5 分钟末测得的未溶解糖块的质量为 3.5 克，同时小明发现可以用指数型函数 $S=ae^{-kt}$ (a，k 为常数)来描述以上糖块的溶解过程，其中 S(单位：克)代表 t 分钟末未溶解糖块的质量，则 $k=$(　　)

A．$\ln 2$　　B．$\ln 3$　　C．$\dfrac{\ln 2}{5}$　　D．$\dfrac{\ln 3}{5}$

5. 函数 $f(x)=\dfrac{1-x^2}{e^x}$的图象大致为(　　)



6. 已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ 的图象连续不断，有下列四个命题：

甲：$f(x)$是奇函数；　　乙：$f(x)$的图象关于直线 $x=1$ 对称；

丙：$f(x)$在区间$[-1,1]$上单调递减；　　丁：函数 $f(x)$的周期为 2.

如果只有一个假命题，则该命题是（　　）

A．甲　　B．乙　　C．丙　　D．丁

7. 若不等式 $x^2+px>4x+p-3$，当 $0\le p\le 4$ 时恒成立，则 x 的取值范围是(　　)

A．$[-1,3]$　　B．$(-\infty，-1]$

C．[3，＋∞)　　　　　　　　　　　　　　　　D．(－∞，－1)∪(3，＋∞)

8. 已知函数 $g(x)=\begin{cases}|\lg x|, & x>0\\ -|\lg(-x)|, & x<0\end{cases}$，若关于 x 的方程 $2^{g(x)}+2^{-g(x)}=\frac{5}{2}$ 有四个不等根 x_1,x_2,x_3,x_4，则 $x_1+x_2+x_3+x_4+g\left(x_1\right)+g\left(x_2\right)+g\left(x_3\right)+g\left(x_4\right)$ 的值是（　　）

A．0　　　　B．2　　　　C．4　　　　D．8

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 如果函数 $f(x)=\log_a|x-1|$在(0,1)上是减函数，那么(　　　)

A．$f(x)$在(1，＋∞)上递增且无最大值　　　　B．$f(x)$在(1，＋∞)上递减且无最小值

C．$f(x)$在定义域内是偶函数　　　　D．$f(x)$的图象关于直线 $x=1$ 对称

10. “关于 x 的不等式 $x^2-2ax+a>0$ 对 $\forall x\in\mathbf{R}$ 恒成立”的一个必要不充分条件是（　　　）

A．$0<a<1$　　　B．$0\le a\le 1$　　　C．$0<a<\frac{1}{2}$　　　D．$a\ge 0$

11. 若正实数 a，b 满足 $a+b=1$，则下列说法正确的是（　　　）

A．ab 有最大值$\frac{1}{4}$　　　　B．$\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 有最大值$\sqrt{2}$

C．$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 有最小值 2　　　　D．a^2+b^2 有最小值$\frac{1}{2}$

12. 设函数 $y=f\left(x\right)$定义域为 D，若存在 $x,y\in D$，且 $x\ne y$，使得 $2f\left(\frac{x+y}{2}\right)=f\left(x\right)+f\left(y\right)$，则称函数 $y=f\left(x\right)$是 D 上的“S 函数”，下列函数是“S 函数”的是（　　　）

A. $y=2^x$　　　B. $y=x-\sin x+1$　　　C. $y=\ln x$　　　D. $y=\begin{cases}\frac{1}{x},x>0\\1,x\le 0\end{cases}$

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．不需写出解答过程，请把答案直接填写在答题卡相应位置上．

13. 函数 $y=\log_5(x^2+2x-3)$的单调递增区间是____▲____.

14. 已知集合 $A=\left\{(x,y)\middle|\frac{y-3}{x-1}=1\right\}$，$B=\left\{(x,y)\middle|y=kx+3\right\}$，若 $A\cap B=\phi$，则实数 $k=$____▲____.

15. 已知正实数 a，b 满足 $ab-b+1=0$，则$\frac{1}{a}+4b$ 的最小值是____▲____.

16. 已知函数 $f(x)=\log_a(x+3)$在区间[－2，－1]上总有$|f(x)|<2$，则实数 a 的取值范围为____▲____.

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分．请在答题卡指定区域内作答．解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17.（**本小题满分 10 分**）

某自来水厂的蓄水池存有 400 吨水，水厂每小时可向蓄水池中注水 60 吨，同时蓄水池又向居民小区不间断供水，t 小时内供水总量为 $120\sqrt{6t}$吨$(0\le t\le 24)$.

(1)从供水开始到第几小时时，蓄水池中的存水量最少？最少水量是多少吨？

(2)若蓄水池中水量少于 80 吨时，就会出现供水紧张现象，请问：在一天的 24 小时内，有几小时出现供水紧张现象？

18.（**本小题满分 12 分**）

已知△ABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，若 $\cos^2\frac{A}{2}=\frac{1}{2}+\frac{b}{2c}$.

(1)求角 C；

(2)若 BM 平分角 B 交 AC 于点 M，且 $BM=1$，$c=6$，求 $\cos\angle ABM$.

\

19. （**本小题满分 12 分**）

已知函数 $f(x)=\dfrac{2^x-1}{2^{x+1}+a}\left(a\in R\right)$ 为奇函数.

（1）求实数 a 的值并证明函数 $f(x)$ 的单调性；

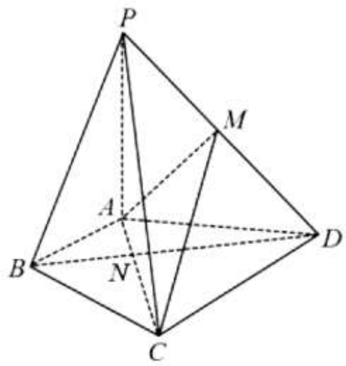
（2）解关于 m 不等式： $f(m^2)+f\left(m-2\right)\le 2-m^2-m$.

20. **（本小题满分 12 分）**

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，AC，BD 相交于点 N，$DN=2NB$，已知 $PA=AC=AD=3$，$BD=3\sqrt{3}$，$\angle ADB=30°$.

（1）求证：$AC\perp$ 平面 PAD；

（2）设棱 PD 的中点为 M，求平面 PAB 与平面 MAC 所成二面角的正弦值.



21. **（本小题满分 12 分）**

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 经过点 $A\left(2,1\right)$，椭圆 C 的离心率 $e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）设过点 $B\left(3,0\right)$ 且与 x 轴不重合的直线 l 与椭圆 C 交于不同的两点 M，N，直线 AM，AN 与直线 $x=-3$ 分别交于 P，Q，记点 P，Q 的纵坐标分别为 p，q，求 $p+q$ 的值.

22. **（本小题满分 12 分）**

已知函数 $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}x^2-ax\right)\ln x-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{3}{2}ax$.

(1)讨论函数 $f(x)$的极值点；

(2)若 $f(x)$极大值大于 1，求 a 的取值范围.

2021～2022 学年度高三年级第一次学情检测

数学参考答案

一、选择题

1. A　　2. C　　3. B　　4. C　　5. D　　6. D　　7. D　　8. A

二、多选题

9. AD　　10. BD　　11. ABD　　12. BD

三、填空题

13. $(1,+\infty)$　　14. 0或1　　15. 9　　16. $\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(\sqrt{2},+\infty\right)$

四、解答题

17. 解：(1)设 t 小时后蓄水池中的水量为 y 吨，

则 $y=400+60t-120\sqrt{6t}$.　　……………2 分

令 $\sqrt{6t}=x$，则 $x^2=6t$，

即 $y=400+10x^2-120x=10(x-6)^2+40$，

所以当 $x=6$，即 $t=6$ 时，$y_{\min}=40$，　　…………4 分

即从供水开始到第 6 小时时，蓄水池水量最少，最少水量是 40 吨．……5 分

(2)依题意 $400+10x^2-120x<80$，　　………7 分

得 $x^2-12x+32<0$，

解得 $4<x<8$，即 $4<\sqrt{6t}<8$，$\dfrac{8}{3}<t<\dfrac{32}{3}$，　　……………9 分

因为 $\dfrac{32}{3}-\dfrac{8}{3}=8$，所以每天约有 8 小时供水紧张．　　……………10 分

18. 解：(1)因为 $\dfrac{1+\cos A}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{b}{2c}$，

所以 $\cos A=\dfrac{b}{c}$，　　……………2 分

所以 $\cos A\sin C=\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C$.

又 $A\in(0,\pi)$，所以 $\sin A\neq 0$，所以 $\cos C=0$，　　……………4 分

因为 $C\in(0,\pi)$所以 $C=\dfrac{\pi}{2}$.　　……………6 分

(2)记 $\angle ABM=\alpha$，则 $\angle MBC=\alpha$.

在 Rt$\triangle MCB$ 中，$BC=\cos\alpha$，

在 Rt$\triangle ACB$ 中，$\cos\angle ABC=\dfrac{BC}{AB}$，即 $\cos 2\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{6}$，　　……………9 分

即 $2\cos^2\alpha-1=\dfrac{\cos\alpha}{6}$，所以 $\cos\alpha=\dfrac{3}{4}$或$-\dfrac{2}{3}$(舍去)，

所以 $\cos\angle ABM=\dfrac{3}{4}$.　　……………12 分

19. 解：（1）因为函数 $f(x)=\dfrac{2^x-1}{2^{x+1}+a}\left(a\in R\right)$为奇函数，所以 $f(x)+f(-x)=0$，即

$$\frac{2^x-1}{2^{x+1}+a}+\frac{2^{-x}-1}{2^{-x+1}+a}=0\text{，即}\frac{\left(2^x-1\right)\left(2^{-x+1}+a\right)+\left(2^{-x}-1\right)\left(2^{x+1}+a\right)}{\left(2^{x+1}+a\right)\left(2^{-x+1}+a\right)}=0\text{，}$$

即$\left(2^x-1\right)\left(2^{-x+1}+a\right)+\left(2^{-x}-1\right)\left(2^{x+1}+a\right)=0$，化简得$\left(a-2\right)\left(2^x+2^{-x}-2\right)=0$，

所以$a=2$. …………… 4 分

(说明直接由用 $f(0)=0$ 求解不给分)

由$a=2$得 $f(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^x+1}$，

任取$x_1<x_2$，

则 $f(x_1)-f(x_2)=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{x_1}+1}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{x_2}+1}\right)=\frac{1}{2^{x_2}+1}-\frac{1}{2^{x_1}+1}=\frac{2^{x_1}-2^{x_2}}{\left(2^{x_2}+1\right)\left(2^{x_1}+1\right)}$

因为$x_1<x_2$，所以$2^{x_1}<2^{x_2}$，$2^{x_1}-2^{x_2}<0$，$2^{x_1}+1>0,2^{x_2}+1>0$，所以 $f(x_1)-f(x_2)<0$

所以 $f(x_1)<f(x_2)$，所以 $f(x)$ 在 R 上单调递增. …………… 8 分

（2） $f(m^2)+f\left(m-2\right)\le 2-m^2-m$ 可化为 $f(m^2)+m^2\le f\left(2-m\right)+2-m$，

设函数 $g(x)=f\left(x\right)+x$，由（1）可知，$g(x)=f\left(x\right)+x$ 在 R 上也是单调递增，

所以$m^2\le 2-m$，即$m^2+m-2\le 0$，解得$-2\le m\le 1$ ……………12 分

20. 解：（1）因为$AD=3$，$BD=3\sqrt{3}$，$\angle ADB=30°$

所以$AB=\sqrt{9+27-2\times 3\times 3\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=3$，所以$\angle BAD=120°$ ……………2 分

在$\triangle ABD$中

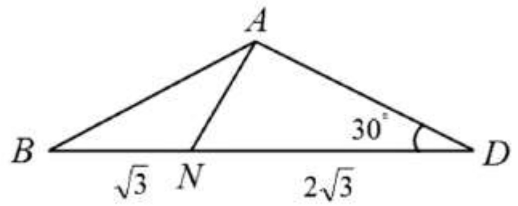
$$AN=\sqrt{9+12-2\times 3\times 2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{3}，$$

所以$AN^2+AD^2=DN^2$，所以$\angle DAN=90°$，所以$AC\perp AD$， ……………4 分

因为$PA\perp$平面$ABCD$

所以$PA\perp AC$，$PA\cap AD=A$，

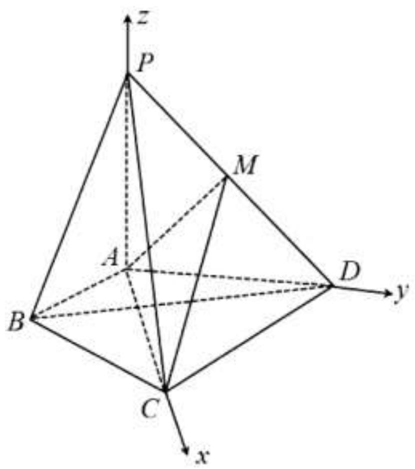
所以$AC\perp$平面PAD ……………6 分



（2）如图建立空间直角坐标系，

所以$P\left(0,0,3\right)$，$A\left(0,0,0\right)$，$B\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2},0\right)$，$D\left(0,3,0\right)$，$M\left(0,\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$，$C\left(3,0,0\right)$

所以$\overrightarrow{PA}=\left(0,0,-3\right)$，$\overrightarrow{AB}=\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2},0\right)$，$\overrightarrow{AM}=\left(0,\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$，$\overrightarrow{AC}=\left(3,0,0\right)$



设平面 PAB 与平面 MAC 法向量分别为 $\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$，$\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$ 二面角为 θ

所以 $\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{PA}=0\\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{AB}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3z_1=0\\ \dfrac{3\sqrt{3}}{2}x_1-\dfrac{3}{2}y_1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=1\\ y_1=\sqrt{3}\\ z_1=0\end{cases}$，$\overrightarrow{n_1}=(1,\sqrt{3},0)$ ……………8 分

$\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{AM}=0\\ \overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{3}{2}y_2+\dfrac{3}{2}z_2=0\\ 3x_2=0\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{n_2}=(0,1,-1)$ ……………10 分

所以 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2\cdot\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{6}}{4}$，$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$. ……………12 分

21. 解：(1) 椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 过点 $A(2,1)$ 且离心率 $e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

则 $\begin{cases}\dfrac{4}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1,\\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}a=\sqrt{6}\\ b=\sqrt{3}\\ c=\sqrt{3}\end{cases}$，故椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1$. ………4 分

(2) 直线 l 的方程为 $y=k(x-3)$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$

$\begin{cases}y=k(x-3)\\ x^2+2y^2=6\end{cases}\Rightarrow x^2+2k^2(x^2-6x+9)-6=0$

$(1+2k^2)x^2-12k^2x+18k^2-6=0$

$\Delta=(-12k^2)^2-4(1+2k^2)(18k^2-6)=24(1-k^2)>0$，得 $-1<k<1$.

所以 $x_1+x_2=\dfrac{12k^2}{1+2k^2}, x_1\cdot x_2=\dfrac{18k^2-6}{1+2k^2}$ ……………6 分

直线 AM 方程为：$y=\dfrac{y_1-1}{x_1-2}(x-2)+1$，令 $x=-3\Rightarrow p=\dfrac{-5(y_1-1)}{x_1-2}+1$ ……………8 分

直线 AN 方程为 $y=\dfrac{y_2-1}{x_2-2}(x-2)+1$，令 $x=-3\Rightarrow q=\dfrac{-5(y_2-1)}{x_2-2}+1$ ……………10 分

所以 $p+q=-5\left(\dfrac{y_1-1}{x_1-2}+\dfrac{y_2-1}{x_2-2}\right)+2=-5\left[\dfrac{k(x_1-3)-1}{x_1-2}+\dfrac{k(x_2-3)-1}{x_2-2}\right]+2$

$$=-5\left[\frac{k(x_1-2)-k-1}{x_1-2}+\frac{k(x_2-2)-k-1}{x_2-2}\right]+2=-10k+5(k+1)\cdot\frac{x_1+x_2-4}{(x_1-2)(x_2-2)}+2$$

$$=-10k+5(k+1)\cdot\frac{\dfrac{12k^2}{1+2k^2}-4}{\dfrac{18k^2-6}{1+2k^2}-\dfrac{24k^2}{1+2k^2}+4}+2=12.$$ ……………12 分

22. **解**：$f'(x)=(x-a)\ln x+\dfrac{1}{2}x-a-x+\dfrac{3}{2}a=(x-a)\left(\ln x-\dfrac{1}{2}\right)$. ……………1 分

(1)当 $a\leq 0$ 时，$f(x)$在$(0，\sqrt{e})$上单调递减，在$(\sqrt{e}，+\infty)$上单调递增，极小值点为 $x=\sqrt{e}$;

当 $0<a<\sqrt{e}$时，$f(x)$在$(0，a)$上单调递增，在$(a，\sqrt{e})$上单调递减，在$(\sqrt{e}，+\infty)$上单调递增，极小值点为 $x=\sqrt{e}$，极大值点为 $x=a$;

当 $a=\sqrt{e}$时，$f(x)$在$(0，+\infty)$单调递增，无极值点;

当 $a>\sqrt{e}$时，$f(x)$在$(0，\sqrt{e})$上单调递增，在$(\sqrt{e}，a)$上单调递减，在$(a，+\infty)$上单调递增，极小值点为 $x=a$，极大值点为 $x=\sqrt{e}$. ……………5 分

(2)由(1)知，

当 $a\leq 0$ 和 $a=\sqrt{e}$时，无极大值，不成立. ……………6 分

当 $a>\sqrt{e}$时，极大值 $f(\sqrt{e})=a\sqrt{e}-\dfrac{e}{4}>1$，解得 $a>\dfrac{\sqrt{e}}{4}+\dfrac{1}{\sqrt{e}}$,

由于$\dfrac{\sqrt{e}}{4}+\dfrac{1}{\sqrt{e}}-\sqrt{e}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}-\dfrac{3\sqrt{e}}{4}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}\left(1-\dfrac{3e}{4}\right)<0$，所以 $a>\sqrt{e}$. ……………8 分

当 $0<a<\sqrt{e}$时，极大值 $f(a)=\dfrac{1}{2}a^2(2-\ln a)>1$,

得 $2-\ln a>\dfrac{2}{a^2}$.

令 $t=a^2$，则 $g(t)=2-\dfrac{1}{2}\ln t-\dfrac{2}{t}$，$0<t<e$,

$g'(t)=-\dfrac{1}{2t}+\dfrac{2}{t^2}=\dfrac{4-t}{2t^2}$,

所以 $g(t)$在$(0，e)$上单调递增，而 $g(1)=0$,

所以 $g(t)>0$ 的解为$(1，e)$，则 $a\in(1，\sqrt{e})$. ……………11 分

所以 a 的取值范围为$(1，\sqrt{e})\cup(\sqrt{e}，+\infty)$. ……………12 分