三角函数

1、已知$\overrightarrow{m}=(\cos\alpha，3)$，$\overrightarrow{n}=(\sin\alpha，3\sqrt{2})$，若$\overrightarrow{m}//\overrightarrow{n}$，则$\sin 2\alpha$=_______，$\cos（-2\alpha+\frac{\pi}{3}）$=___________.

2、将函数$f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{4})$的图象向右平移$\varphi(\varphi>0)$个单位，再将图象上每一点横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$倍，所得图象关于直线$x=\frac{\pi}{4}$对称，则$\varphi$的最小正值为___________.

3、在△ABC 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，若△ABC 为锐角三角形，且满足$c^2-b^2=ab$，则$\frac{1}{\tan B}-\frac{1}{\tan C}+2\sin C$的取值范围是_______.

4、已知$\tan\alpha=-\frac{1}{3}$，$\cos\beta=\frac{\sqrt{5}}{5}$，α，β ∈（0，π）.

（1）求$\alpha+\beta$的值；

（2）求函数$f(x)=\sqrt{2}\sin(x-\alpha)+\cos(x+\beta)$的最大值.

1、$\frac{2\sqrt{2}}{3}$；$\frac{2\sqrt{6}-1}{6}$　　2、$\frac{3\pi}{8}$　　3、$(\frac{5\sqrt{3}}{3},3)$

解析：

由 $c^2-b^2=ab$, 得

$a^2+b^2-2ab\cdot\cos C-b^2=ab$,

即 $a^2=2ab\cdot\cos C+ab$,

$\therefore a=2b\cdot\cos C+b$,

由正弦定理得 $\sin A=2\sin B\cos C+\sin B$,

$\therefore \sin(C+B)=2\sin B\cos C+\sin B$,

$\therefore \sin C\cos B-\cos C\sin B=\sin B$, 即

$\sin(C-B)=\sin B$,

$\because \triangle ABC$ 为锐角三角形， $\therefore C-B=B$.

即 $C=2B$,

由此可得 , $B\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)$、 $C\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$,

因此 $\frac{1}{\tan B}-\frac{1}{\tan C}+2\sin C=\frac{\sin(C-B)}{\sin B\sin C}+2\sin C$

$=\frac{\sin(2B-B)}{\sin B\sin C}+2\sin C=\frac{1}{\sin C}+2\sin C$,

设 $t=\sin C\left(\frac{\sqrt{3}}{2}<t<1\right)$,

则 $\frac{1}{\sin C}+2\sin C=h(t)=\frac{1}{t}+2t\left(\frac{\sqrt{3}}{2}<t<1\right)$

$\because h'(t)=\frac{2\left(t+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(t-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{t^2}>0$, 在

$\therefore h(t)$

$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},1\right)$ 上递增，

$\therefore h(t)\in\left(\frac{5\sqrt{3}}{3},3\right)$, 即

$\frac{1}{\tan B}-\frac{1}{\tan C}+2\sin C$的取值范围是

$\left(\frac{5\sqrt{3}}{3},3\right)$,

4、

解：(1) 由 $\cos\beta=\frac{\sqrt{5}}{5}$， $\beta\in(0,\pi)$，得 $\sin\beta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，即 $\tan\beta=2$.

$$\therefore \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{-\frac{1}{3}+2}{1+\frac{2}{3}}=1.$$

因为$\alpha\in(0,\pi)$，$\tan\alpha=-\frac{1}{3}\therefore\alpha\in(\frac{\pi}{2},\pi)$

因为$\beta\in(0,\pi)$，$\cos\beta=\frac{\sqrt{5}}{5}\therefore\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore\alpha+\beta\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$

因为$\tan(\alpha+\beta)=1\therefore\alpha+\beta=\frac{5\pi}{4}$

另：本题也可以求正弦

(2) $\because \tan\alpha=-\frac{1}{3}$， $\alpha\in(0,\pi)$，

$\therefore \sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}}$，$\cos\alpha=-\frac{3}{\sqrt{10}}$.

$\therefore f(x)=-\frac{3\sqrt{5}}{5}\sin x-\frac{\sqrt{5}}{5}\cos x+\frac{\sqrt{5}}{5}\cos x-\frac{2\sqrt{5}}{5}\sin x$

$=-\sqrt{5}\sin x$.

$\therefore f(x)$ 的最大值为$\sqrt{5}$.